普通高级中学课程标准实验教科书

【北师大版】

数学

必修

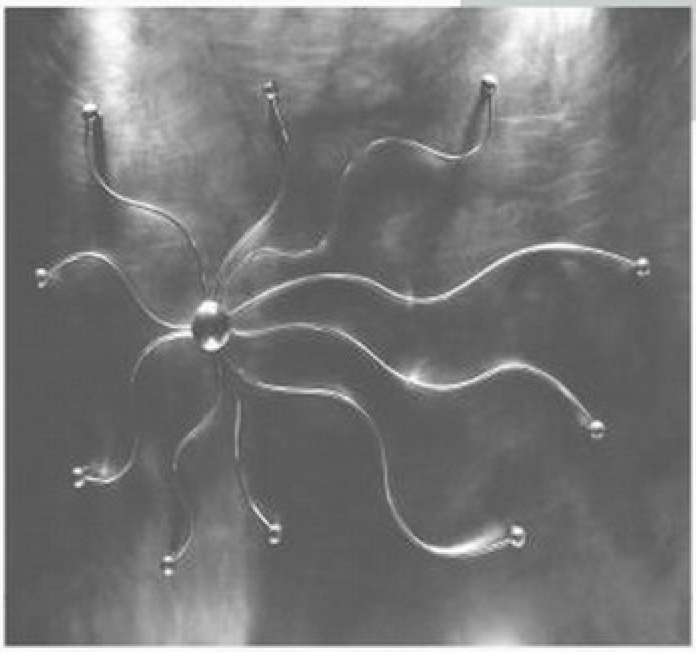
4

目　录

第一章 三角函数

周期现象是自然界中一类基本的现象，周期函数是刻画周期现象的函数模型. 三角函数是一类重要的周期函数，也是一类基本的初等函数. 它在天文测量、大地测量、工程测量、机械制造、力学、光学、电学、地球物理学及图像处理等众多学科和领域中都有广泛的应用.

本章将从周期现象出发，引入弧度制，学习三角函数的图像和性质，并通过实例了解三角函数在日常生活中的简单应用.



§1　周期现象

问题提出

观察钱塘江潮的图片，我们看到：波浪每间隔一段时间会重复出现．这种现象被称为周期现象．在我们的日常生活、生产实践中存在着大量周期性变化的现象．我们能不能用数学方法来探究周期现象中所蕴涵的规律呢？

钱塘江潮

分析理解

众所周知，海水会发生潮汐现象．大约在每一昼夜的时间里，潮水会涨落两次，因此潮汐是周期现象．当潮汐发生时，水的深度会产生周期性变化．为了研究水深的变化规律，我们可以构造一个函数．例如，确定一个位置，考察该处水深 H 和时间 t 的关系，那么 H 就是 t 的函数．

表 1-1 是某港口在某一天水深与时间的对应关系表，通过表中数据，我们来研究 $H(t)$ 这个函数．

表 1-1

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
1:00	5.0	6:00	5.3	11:00	3.5
2:00	6.2	7:00	4.1	12:00	4.4
3:00	7.5	8:00	3.1	13:00	5.0
4:00	7.3	9:00	2.5	14:00	6.2
5:00	6.2	10:00	2.7	15:00	7.5

续表

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
16:00	7.3	19:00	4.1	22:00	2.7
17:00	6.2	20:00	3.1	23:00	3.5
18:00	5.3	21:00	2.5	24:00	4.4

根据上表提供的数据在坐标纸上可以作出水深 H 与时间 t 关系的散点图(如图 1-1).

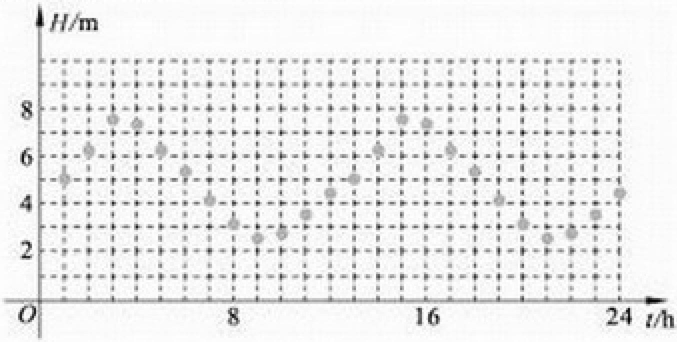


图 1-1

抽象概括

从散点图可以看出,每经过相同的时间间隔 T(12 h),水深就重复出现相同的数值,因此,水深是周期性变化的. 这样的周期现象在我们身边还有很多,下面我们再分析几个例子.

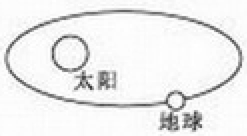


图 1-2

例 1 地球围绕着太阳转(如图 1-2),地球到太阳的距离 y 随时间的变化是周期性的吗?

根据物理学知识,我们知道在任何一个确定的时刻,地球与太阳的距离 y 是唯一确定的,每经过一年地球围绕着太阳转一周. 无论从哪个时刻 t 算起,经过一年时间,地球又回到原来的位置,所以,地球与太阳的距离是周期变化的.

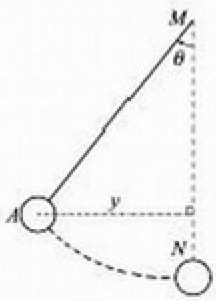


图 1-3

例 2 图 1-3 是钟摆的示意图. 摆心 A 到铅垂线 MN 的距离记为 y,钟摆偏离铅垂线 MN 的角记为 θ. 根据物理知识,y 与 θ 都随时间的变化而周期性变化.

例 3 图 1-4 是水车的示意图. 水车上 A 点到水面的距离为 y. 假设水车 5 min 转一圈,那么 y 的值每经过 5 min 就会重复出现,因

此，距离 y 随时间的变化规律也具有周期性.

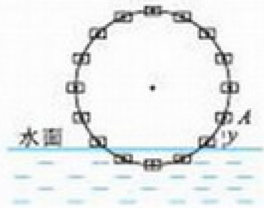


图 1-4

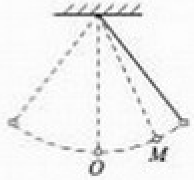
由上面的例子，我们可以看到在自然界中存在着大量的周期现象.

思考交流

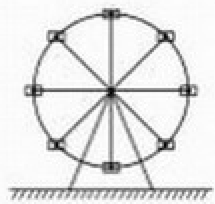
1. 地球上一年春、夏、秋、冬四季的变化是周期现象吗？
2. 钟表的分针每小时转一圈，它的运行是周期现象吗？
3. 连续抛一枚硬币，面值朝上我们记为 0，面值朝下我们记为 1，数字 0 和 1 是否会周期性地重复出现？
4. 请同学们列举身边的周期现象.

习 题 1—1

1. 设钟摆每经过 1.8 s 回到原来的位置. 在图 1-3 中钟摆达到最高位置时开始计时，经过 1 min 后，请你估计钟摆在铅垂线的左边还是右边.
2. 一个质点在平衡位置 O 点附近振动. 如果不计阻力，可将这个振动看作周期运动. 它离开 O 点向左运动，4 s 后第 1 次经过 M 点，再过 2 s 第 2 次经过 M 点. 该质点再过多长时间第 3 次经过 M 点？



（第 2 题）


（第 3 题）

3. 游乐场中的摩天轮有 8 个座舱，每个座舱最多乘 4 人，每20 min转一圈. 请估算 8 h 内最多有多少人乘坐.

§2　角的概念的推广

通过上节的研究我们知道，水车轮边沿上的定点 A 到水面的距离 y，可以看作是水车轮中心 O 与 A 点的连线与过 O 点的铅垂线方向的夹角 θ 的函数 $y=g(\theta)$，其中自变量 θ 是角度. 为了深入地研究这种以角度为自变量的函数，我们有必要对角的概念进行推广.

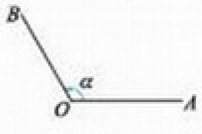


图 1-5

初中时我们学过锐角、直角和钝角等，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

拧螺丝时，按逆时针方向旋转会越拧越松，按顺时针方向旋转会越拧越紧. 可见，规定射线旋转的方向很有必要.

在数学上，我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫作**正角**；按顺时针方向旋转形成的角叫作**负角**. 这样，钟表在正常运行时它的指针旋转所形成的角总是负角. 在图 1-5 中，一条射线的端点是 O，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，形成了一个正角，记作 α. 点 O 是角的顶点，射线 OA，OB 分别是 α 的始边、终边.

以前我们只研究了 $0°\sim360°$ 范围的角（指大于等于 $0°$ 小于 $360°$），实际上在生活中还会遇到范围更大的角. 例如，自行车的车轮周而复始地转动 1 根辐条形成的角. 在跳水运动中，有“转体 720°”（即“转体 2 周”）、“转体 1 080°”（即“转体 3 周”）的动作名称. 这就是说，角度可以不限于 $0°\sim360°$ 范围. 如图1-6中的角为正角，它等于 $750°$；图 1-7 中，正角 $\alpha=210°$，负角 $\beta=-150°$，$\gamma=-660°$.

图 1-6

如果一条射线从起始位置 OA 没有作任何旋转，终止位置 OB 与起始位置 OA 重合，我们称这样的角为**零度角**，又称**零角**，记作 $\alpha=0°$.

通过对角的概念的推广，我们知道角应包括正角、负角和零角.

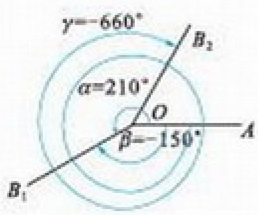


图 1-7

分析理解

为了研究问题方便，我们常在直角坐标系内讨论角. 为此使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 那么，角的终边（除端点外）在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 例如，图 1-8 中的 $30°$，$390°$，$-330°$ 角，都是第一象限角；图 1-9 中的 $300°$，$-60°$ 角，都是第四象限角；$585°$ 角是第三象限角.

从图 1-8 中可以看出，390°，-330° 角的终边都与 30° 角的终边相同，并且这两个角都可以表示成 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角与 k 个周角的和，其中 k 为整数，即

$$390^\circ = 30^\circ + 1 \times 360^\circ \ (k=1),$$
$$-330^\circ = 30^\circ + (-1) \times 360^\circ \ (k=-1).$$

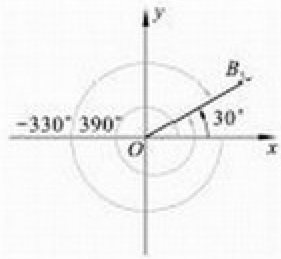


图 1-8

设集合 $S=\{\beta \mid \beta=30^\circ+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$，则 390°，-330° 角都是 S 的元素，30° 角也是 S 的元素（$k=0$）. 容易看出：所有与 30° 角终边相同的角，连同 30° 角在内，都是集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 30° 角终边相同.

抽象概括

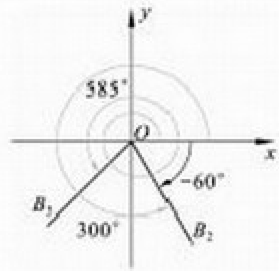


图 1-9

一般地，所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\},$$

即任何一个与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与周角的整数倍的和.

例 1　判定下列各角是第几象限角：

(1) -60°；　(2) 585°；　(3) $-950^\circ 12'$.

解　(1) 因为 -60° 角的终边在第四象限，所以它是第四象限角；

(2) 因为 $585^\circ = 360^\circ + 225^\circ$，所以 585° 与 225° 角的终边重合，而 225° 的终边在第三象限，所以 585° 是第三象限角；

(3) 因为 $-950^\circ 12' = (-2)\times 360^\circ - 230^\circ 12'$，而 $-230^\circ 12'$ 的终边在第二象限，所以 $-950^\circ 12'$ 是第二象限角.

例 2　在直角坐标系中，写出终边在 y 轴上的角的集合（用 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角表示）.

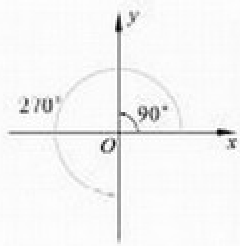


图 1-10

解　在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，终边在 y 轴上的角有两个，即 90° 与 270° 角（如图 1-10）. 因此，所有与 90° 角终边相同的角构成集合

$$S_1=\{\beta \mid \beta=90^\circ+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\};$$

而所有与 270° 角终边相同的角构成集合

$$S_2=\{\beta \mid \beta=270^\circ+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}.$$

于是，终边在 y 轴上的角的集合

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \\ &= \{\beta \mid \beta=90^\circ+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\} \cup \\ &\quad \{\beta \mid \beta=270^\circ+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

例 3 写出与 60° 角终边相同的角的集合 S，并把 S 中适合不等式 $-360^\circ \leqslant \beta < 720^\circ$ 的元素 β 写出来．

解 $S=\{\beta|\beta=60^\circ+k\times 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

S 中适合 $-360^\circ \leqslant \beta < 720^\circ$ 的元素是：

$$60^\circ-1\times 360^\circ=-300^\circ,$$
$$60^\circ+0\times 360^\circ=60^\circ,$$
$$60^\circ+1\times 360^\circ=420^\circ.$$

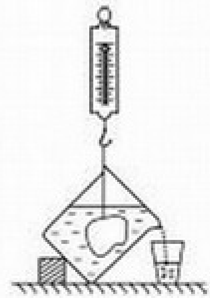
习题 1—2

1. 锐角是第几象限角？第一象限角一定是锐角吗？再分别就直角、钝角来回答这两个问题.
2. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角.
   (1) $-54^\circ 18'$；　(2) $395^\circ 8'$；　(3) $-1\,190^\circ 30'$；　(4) $1\,563^\circ$.
3. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-720^\circ \leqslant \beta < 360^\circ$ 的元素 β 写出来.
   (1) 60°；　(2) -45°；　(3) $1\,303^\circ 18'$；　(4) -225°.
4. 请用算术四则运算的道理说明求与已知角 α 终边相同的最小正角（即 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内）的方法.

§3　弧　度　制

问题提出

我们曾经学过度量角的一种方法，是用周角的$\frac{1}{360}$作为一个单位，称为1度的角，用它去度量其他角的大小．由于这种度量方法采用的是60进制，它在实际应用中带来很多不便．



在实际生活中，人们常常需要用不同的方法去度量某一个量．例如，在初中物理中所学的液体压强仪就是利用液面差（单位：m）来测量液体内部的压强（单位：Pa）的；在测量液体浮力（单位：N）的大小时，则常常用排开液体的体积（单位：m^3）来测量．

下面我们介绍一种用长度来度量角的方法．

分析理解

在给定半径的圆中，我们学过0°～360°的角所对应的弧长公式$l=\frac{n\pi r}{180}$（r为给定半径，n为角度数），从这个公式我们可以看到，在一个给定半径的圆中，弧长和圆心角是一一对应的．

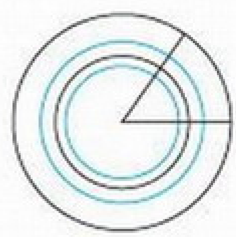


图1-11

通过度量和计算，我们发现，当半径不同时（如图1-11），同样的圆心角所对的弧长与半径之比是常数❶（表1-2）．

表1-2

弧长/cm	0.80	0.86	1.21	2.35
半径/cm	0.93	1.00	1.40	2.71
弧长与半径之比	0.86	0.86	0.86	0.86

❶事实上，我们可以证明这个结果，有兴趣的同学可以思考如何证明．

我们称这个常数为该角的弧度数．显然，在以单位长为半径的圆中，单位长度的弧所对的圆心角为1弧度的角，它的单位符号是**rad**，读作**弧度**．

不难看出，大小不同的角，其弧度数一定不相同．因此，我们可以用角的弧度数来度量角的大小．弧度有效地把角度单位与长度单位统一起来．

如图1-12，$\overset{\frown}{AB}$的长等于1，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角$\angle AOB$就是1弧度

的角.

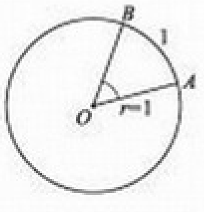


图 1-12

说　明

弧度的概念是由瑞士数学家欧拉（1707—1783）于1748年引入的. 弧度制的基本作用之一在于统一了角度与长度的单位，有助于某些数学问题的表示和研究. 今后我们用弧度制表示角的时候，"弧度"二字或"rad"通常略去不写，而只写这个角所对应的弧度数. 例如，$\alpha=2$ 就表示 α 是 2 rad 的角.

在以单位长为半径的圆中，当圆心角为周角时，它所对的弧长（即圆周长）为 2π，所以周角的弧度数是 2π.

由此可知，任意一个 $0°\sim360°$ 的角的弧度数必然适合不等式

$$0\leqslant x<2\pi.$$

角度与弧度的互化：

因为周角的弧度数是 2π，而在角度制下它是 $360°$，所以

$$360°=2\pi\ \text{rad}; \tag{1.1}$$

$$180°=\pi\ \text{rad}; \tag{1.2}$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx0.017\,45\ \text{rad}; \tag{1.3}$$

$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx57.30°=57°18'. \tag{1.4}$$

例 1　把 $45°$ 化成弧度.

解　$45°=\frac{\pi}{180}\times45\ \text{rad}=\frac{\pi}{4}\ \text{rad}.$

例 2　把 $\frac{3\pi}{5}$ rad 化成度.

解　$\frac{3\pi}{5}\ \text{rad}=\frac{3}{5}\times180°=108°.$

下面是一些特殊角的度数与弧度数的对应表：

表 1-3

度数	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

对于 $0°\sim360°$ 之外的角，我们也不难得到它们的弧度数. 例如，$-30°=-\frac{\pi}{6}\ \text{rad}$，$420°=360°+60°=\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\ \text{rad}=\frac{7\pi}{3}\ \text{rad}.$

抽象概括

一般地，任一正角的弧度数都是一个正数；任一负角的弧度数都是一个负数；零角的弧度数是 0. 这种以弧度作为单位来度量角的单位制，叫作**弧度制**. 弧度制确立了角的弧度数与实数间的一一对应关系，它很好地把角度单位与长度单位统一起来，这为我们将来研究三角函数提供了方便.

设 r 是圆的半径，l 是圆心角 α 所对的弧长，在使用弧度制时，圆心角 α 的弧度数通常也用 α 来表示，由弧度的定义可知，角 α 的弧度数的绝对值满足：

$$|\alpha|=\frac{l}{r}, \tag{1.5}$$

即

$$l=|\alpha|r. \tag{1.6}$$

这就是说，**弧长等于弧所对的圆心角弧度数的绝对值与半径的积.** 容易证明，该结论对于任意角都成立.

采用角度制时的相应公式为：

$$l=\frac{|n|\pi r}{180}. \tag{1.7}$$

其中 n 表示角度数.

信息技术建议

可以利用信息技术探究扇形面积与半径的关系并给予证明. 用数学软件或图形计算器作出图 1-13，改变圆上 A 点的位置，观察数据变化，确定扇形面积与弧长的关系；A 点不动，改变半径，观察数据变化，确定扇形面积与半径的关系.

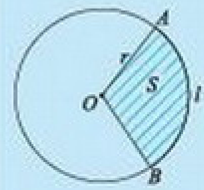


图 1-13

思考交流

请问在你学过的量中，还有哪些量可以有不同的度量方法？

习　题　1—3

1. 把下列各角从度化成弧度.

（1）$135°$；　（2）$90°$；　（3）$60°$.

2. 把下列各角从弧度化成度.

（1）2π；　（2）$\frac{\pi}{2}$；　（3）$\frac{2\pi}{3}$；　（4）$\frac{\pi}{6}$.

3. 时间经过 4 h，时针、分针各转了多少度？各等于多少弧度？

4. 用弧度制表示终边在 x 轴上的角的集合.

5. 求下列各式的值（可以用计算器）.

（1）$\sin\frac{\pi}{3}$；　（2）$\tan\frac{\pi}{6}$；　（3）$\cos 1.2$；　（4）$\sin 1$.

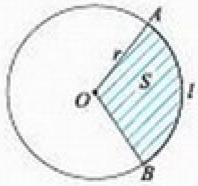
6. 分别用角度制、弧度制下的弧长公式，计算半径为 1 m 的圆中，$60°$的圆心角所对的弧的长度.

7. 把下列各角化成 $0\sim2\pi$ 间的角加上 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是哪个象限的角.

（1）$\frac{23\pi}{6}$；　（2）$-1\ 500°$；　（3）$-\frac{18\pi}{7}$；　（4）$672°$.

8. 扇形弧长为 18 cm，半径为 12 cm，求扇形面积.

9. 如图所示，试利用弧度制证明扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lr$，其中 l 是扇形的弧长，r 是圆的半径.



（第 9 题）

§4 正弦函数和余弦函数的定义与诱导公式

4.1 任意角的正弦函数、余弦函数的定义

在初中,我们借助于直角三角形学习了锐角 α 的正弦函数、余弦函数(如图 1-14),$\sin\alpha=\dfrac{h}{r}$,$\cos\alpha=\dfrac{s}{r}$,即每给定一个 $0°\sim90°$的角(不包括 $0°$和 $90°$),就可以得到一个正弦函数值、余弦函数值与之对应.如图 1-15,$\sin30°=\dfrac{1}{2}$,$\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,如图 1-16,$\sin45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

图 1-14

由上一节引入的弧度的概念,我们可以将 $\sin30°$ 写成 $\sin\dfrac{\pi}{6}$,$\sin45°$写成 $\sin\dfrac{\pi}{4}$.以后若不做特殊说明,角的单位均为弧度.

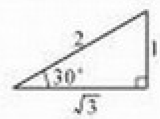


图 1-15

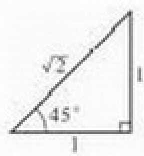


图 1-16

下面,我们在直角坐标系中,利用单位圆来进一步研究锐角 α 的正弦函数、余弦函数.

在直角坐标系中,以原点为圆心,以单位长为半径的圆,称为**单位圆**.给定一个锐角 α,使角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,终边与单位圆交于点 $P(u,v)$,则点 P 的纵坐标 v 是角 α 的正弦函数值,横坐标 u 是角 α 的余弦函数值.即

$$\sin\alpha=v,\cos\alpha=u.$$

由图 1-17 可知,当 $\alpha=0$ 时,$\sin0=v=0$,$\cos0=u=1$;当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\sin\dfrac{\pi}{2}=v=1$,$\cos\dfrac{\pi}{2}=u=0$.

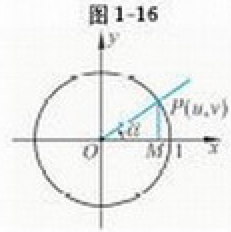


图 1-17

这样就得到定义在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的角 α 的正弦函数 $v=\sin\alpha$ 和余弦函数 $u=\cos\alpha$.

一般地,如图 1-18 所示,在直角坐标系中,给定单位圆,对于任意角 α,使角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,终边与单位圆交于点 $P(u,v)$,那么点 P 的纵坐标 v 叫作角 α 的**正弦函数**,记作 $v=\sin\alpha$;点 P 的横坐标 u 叫作角 α 的**余弦函数**,记作 $u=\cos\alpha$.

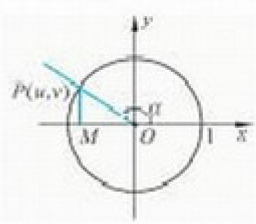


图 1-18

通常,我们用 x 表示自变量,即 x 表示角的大小,用 y 表示函数

值，这样我们就定义了任意角三角函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$. 它们的定义域为全体实数，值域为$[-1,1]$. 这与初中所学的锐角三角函数的定义是一致的.

思考交流

观察图 1-19，讨论当角 α 的终边分别在第一、第二、第三、第四象限时，角 α 的正弦函数值、余弦函数值的正、负号，并将讨论的结果填入表 1-4：

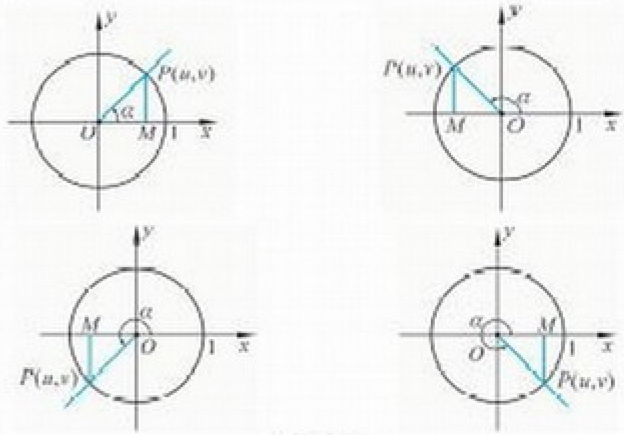


图 1-19

表 1-4

象限 三角函数	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				

例 1 在直角坐标系的单位圆中，$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$，

(1)画出角 α；

(2)求出角 α 的终边与单位圆的交点坐标；

(3)求出角 α 的正弦函数值、余弦函数值.

图 1-20

解 (1) 如图 1-20，以原点为角的顶点，以 x 轴正半轴为始边，顺时针旋转$\dfrac{\pi}{4}$，与单位圆交于点 P，$\alpha=\angle MOP=-\dfrac{\pi}{4}$，即为所求作的角.

(2) 由于 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$，点 P 在第四象限，所以点 P 坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(3) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

动手实践

在直角坐标系的单位圆中，画出下列各特殊角，求各个角终边与单位圆的交点坐标，并将各特殊角的正弦函数值、余弦函数值填入表1-5：

表1-5

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\sin x$														
$y=\cos x$														

观察此表格中的数据，你能发现函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的变化有什么特点吗？

4.2 单位圆与周期性

观察图1-21，在单位圆中，由任意角的正弦函数、余弦函数定义不难得到下列事实：

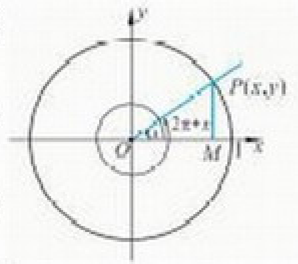


图1-21

终边相同的角的正弦函数值相等，即 $\sin(x+k\cdot 2\pi)=\sin x$，$k\in\mathbf{Z}$；

终边相同的角的余弦函数值相等，即 $\cos(x+k\cdot 2\pi)=\cos x$，$k\in\mathbf{Z}$.

上述两个等式说明：对于任意一个角 x，每增加 2π 的整数倍，其正弦函数值、余弦函数值均不变. 所以，正弦函数值、余弦函数值均是随角的变化呈周期性变化的. 生活中有许多周期性变化的现象，例如，钟摆的摆心到铅垂线的距离随时间的变化也呈周期性变化. 从而我们把这种随自变量的变化呈周期性变化的函数叫作周期函数. 正弦函数、余弦函数是周期函数，称 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为正弦函数、余弦函数的周期. 例如，-4π，-2π，2π，4π 等都是它们的周期. 其中 2π 是正弦函数、余弦函数正周期中最小的一个，称为**最小正周期**.

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在非零实数 T，对定义域内的任意一个 x 值，都有

$$f(x+T)=f(x),$$

我们就把 $f(x)$ 称为**周期函数**，T 称为这个函数的**周期**.

说　明

若不加特别说明，本书所指周期均为函数的最小正周期.

练 习

1. 阅读§4.2单位圆与周期性，请回答以下问题：

(1) 函数 $f(x)=x^2$ 满足 $f(-3+6)=f(-3)$，这个函数是不是以6为周期的周期函数？

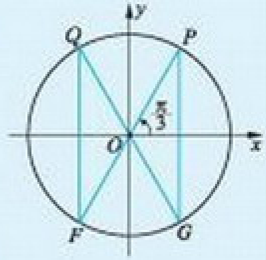
(2) 函数 $y=\sin x$ 是周期函数，且 $f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，为什么 $\frac{\pi}{2}$ 不是它的周期？

(3) 请用你自己的语言解释周期函数和周期的概念.

2. 在直角坐标系的单位圆中，已知角 α 的终边上异于原点的任意一点 $P(a,b)$，则角 α 终边与单位圆的交点坐标是________.

3. 在直角坐标系的单位圆中，作出下列各角，写出它们的正弦函数值、余弦函数值.

(1) $\frac{5\pi}{2}$；　(2) $\frac{25\pi}{6}$；　(3) $-\frac{7\pi}{4}$；　(4) $\frac{11\pi}{3}$.



(第4题)

4. 如图所示.

(1)点 P 的坐标是________，点 F 的坐标是________；

(2)若点 Q 的坐标是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，那么 $\angle xOQ=$________(弧度)，点 G 的坐标是________.

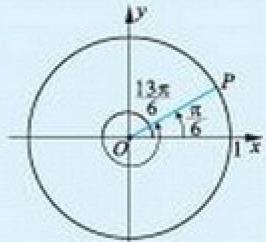
5. 回答下列问题：

(1) 如图所示，点 P 的坐标是________，角 $\frac{13\pi}{6}$ 的正弦函数值是________，余弦函数值是________；

(2) 角 $-\frac{\pi}{6}$ 的正弦函数值是________，余弦函数值是________，点 P 的坐标是________；

(3) $\sin\frac{2\pi}{3}=$________，$\cos\frac{2\pi}{3}=$________；

(4) $\sin\frac{7\pi}{6}=$________，$\cos\frac{7\pi}{6}=$________.



第5(1)题

4.3 单位圆与诱导公式

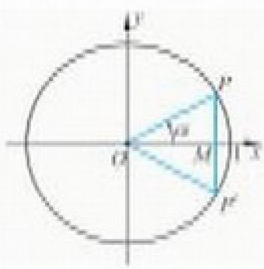


图 1-22

1. 角 α 与 $-\alpha$ 的正弦函数、余弦函数关系

在直角坐标系的单位圆中，对任意角 $\angle MOP=\alpha$，作 $\angle MOP'=-\alpha$，这两个角的终边与单位圆的交点分别为 P 和 P'. 不难看出，这两个角的终边 OP,OP' 关于 x 轴对称(如图1-22和图1-23，图中给出的角 α 是终边分别在第一、二象限的情形). 因此，点 P 和 P' 的横坐标相等，纵坐标的绝对值相等且符号相反. 即

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha，\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

2. 角 α 与 $\alpha\pm\pi$ 的正弦函数、余弦函数关系

在直角坐标系的单位圆中，对任意角 $\angle MOP=\alpha$，设角的终边与

单位圆的交点为 P，当点 P 逆（顺）时针旋转 π 弧度至点 P' 时，P' 点的坐标为：$(\cos(\alpha+\pi),\sin(\alpha+\pi))$（或 $(\cos(\alpha-\pi),\sin(\alpha-\pi))$）. 不难看出，点 P' 是点 P 关于原点的对称点（如图 1-24）. 因此，它们的横坐标绝对值相等且符号相反，纵坐标绝对值相等且符号相反. 即

$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha,\ \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha,\ \cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha.$$

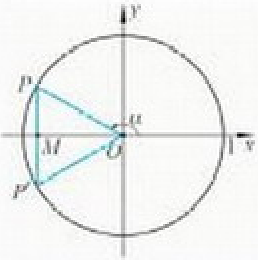


图 1-23

3. 角 α 与 $\pi-\alpha$ 的正弦函数、余弦函数关系

观察图 1-25，在单位圆中，当 $\angle MOP=\alpha$ 是锐角时，作 $\angle MOP'=\pi-\alpha$，不难看出，点 P 和点 P' 关于 y 轴对称. 因此，它们的纵坐标相等，横坐标的绝对值相等且符号相反（可以验证，当 α 不是锐角时，这一结论仍成立），即对任意角 α，有

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

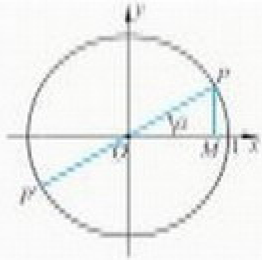


图 1-24

这两个公式也可以由前两组公式推出：

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(\alpha-\pi)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha.$$

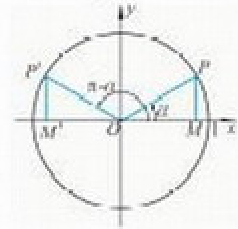


图 1-25

例 2　求下列各角的三角函数值：

(1) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$；　(2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$；　(3) $\cos\left(-\dfrac{31\pi}{6}\right)$.

解　(1) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{7\pi}{4}=-\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=-\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$；

(3) $\cos\left(-\dfrac{31\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{31\pi}{6}=\cos\left(4\pi+\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

练　习 1

1. 在单位圆中，角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(-\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$，写出点 P 关于 x 轴、y 轴和原点对称的点的坐标，并分别求角 $\pi-\alpha$，$-\alpha$，$\pi+\alpha$，$2\pi-\alpha$ 的正弦函数值、余弦函数值.
2. 利用单位圆，求适合下列条件的角的集合.

(1) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\sin\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$.

4. 角 α 与 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的正弦函数、余弦函数关系

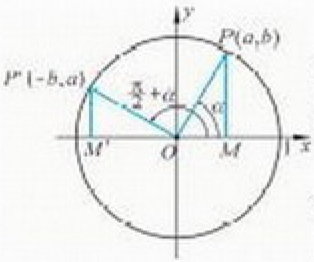


图 1-26

观察图 1-26，设锐角 α 的终边与单位圆交于点 $P(a,b)$，则角 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的终边与单位圆交于点 P'，由平面几何知识可知，$\mathrm{Rt}\triangle OPM\cong\mathrm{Rt}\triangle P'OM'$. 不难证明，点 P'的坐标为$(-b,a)$. 所以，点 P 的横坐标 $\cos\alpha$ 与点 P'的纵坐标 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$相等，即$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$. 点 P 的纵坐标 $\sin\alpha$ 与点 P'的横坐标$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$的绝对值相等且符号相反，即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

以上结论对任意角 α 都成立，即对任意角 α，有

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha.$$

思考交流

如何得到下面两个等式？

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

抽象概括

对任意角 α，下列关系式成立：

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha \tag{1.8}$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \tag{1.9}$$
$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \tag{1.10}$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \tag{1.11}$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \tag{1.12}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \tag{1.13}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \tag{1.14}$$

公式 1.8～1.14 叫作正弦函数、余弦函数的**诱导公式**.

可以利用诱导公式，将任意角的正弦函数、余弦函数问题转化为锐角的正弦函数、余弦函数的问题.

例 3　求下列函数值：

(1) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)$；

(3) $\sin\frac{5\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{4}$.

解　(1) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\sin\left(-\frac{55\pi}{6}\right)=-\sin\frac{55\pi}{6}=-\sin\left(8\pi+\frac{7\pi}{6}\right)$

$$=-\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}；$$

(3) $\sin\frac{5\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{4}$

$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4　化简：$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(3\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(-\pi+\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\cos(-\alpha-\pi)}$.

解　原式 $=\dfrac{(-\sin\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{[-\sin(\pi-\alpha)]\sin(\pi-\alpha)\cos[-(\pi+\alpha)]}$

$$=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}{(-\sin\alpha)\sin\alpha(-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

思考交流

如何借助单位圆帮助记忆诱导公式呢?

练　习 2

1. 在单位圆中，已知角 α 的终边与单位圆的交点是 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，分别求角 α，$\frac{\pi}{2}+\alpha$，$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的正弦函数值、余弦函数值.

2. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-0.3$，分别求下列函数值：

(1) $\cos\alpha$；　(2) $\cos(\pi+\alpha)$；　(3) $\cos(-\alpha)$；　(4) $\cos(2\pi-\alpha)$；　(5) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

3. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，求 $\sin(-3\pi+\alpha)$ 的值.

4. 化简：

(1) $1+\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

(2) $\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha-3\pi)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

习 题 1—4

A 组

1. 已知角 α 的终边经过下列各点，求角 α 的正弦函数值、余弦函数值.

(1) $(2,\sqrt{5})$；　(2) $(-3,4)$；　(3) $(-\sqrt{3},-1)$；　(4) $(5,-12)$.

2. 请用单位圆和诱导公式两种方法判断下列三角函数值的符号.

(1) $\sin 185°$；　(2) $\sin\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$；　(3) $\sin 7.6\pi$；

(4) $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$；　(5) $\cos 940°$；　(6) $\cos\left(-\frac{59\pi}{17}\right)$.

3. 已知 $P(-2,y)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，求 y 的值.

4. 在表中空白处填上适当的数值.

x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$y=\sin x$								
$y=\cos x$							0.923 9	
x	$\frac{17\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{23\pi}{8}$	3π
$y=\sin x$	0.382 7							
$y=\cos x$								

5. 利用单位圆和 $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ 的正弦函数值、余弦函数值，可以求出区间 $\left[-\frac{7\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right]$ 内哪些角的正弦函数值、余弦函数值？并求出这些角的正弦函数值、余弦函数值.

6. 角 α 的顶点在原点，始边与 x 轴的正半轴重合，终边在函数 $y=-2x(x\leqslant 0)$ 的图像上.

(1) 求 $\cos\alpha$ 和 $\sin(\pi+\alpha)$ 的值.

(2) 能否求出角 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，$-\alpha$，$2\pi-\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的正弦函数值、余弦函数值？若能，求出值，若不能，请说明理由.

7. 计算：

(1) $2\sin 0°+5\sin 90°-3\sin 270°+10\sin 180°$；

(2) $\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}$；

(3) $\cos 0°+5\sin 90°-3\sin 270°+10\cos 180°$；

(4) $\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}$；

(5) $\sin^4\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{2}+6\tan^3\frac{\pi}{4}$.

8. 化简：

(1) $1-\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-2\sin^2(-\alpha)$；

(2) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)+\sin(-\alpha-\pi)\sin(\alpha-2\pi)}{\sin(4\pi-\alpha)\sin(5\pi+\alpha)}$；

(3) $p\sin\pi+q\cos\frac{\pi}{2}+k\cos 2\pi$；

(4) $-p^2\cos 180°+q^2\sin 90°-2pq\cos 0°$；

(5) $a^2\cos 2\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\sin\frac{\pi}{2}$.

B　组

1. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$，求 $\sin(\pi-\alpha)$ 的值.

2. 已知 $\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 θ 的取值范围.

3. 利用三角函数定义证明：$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

4. 利用单位圆讨论函数 $y=\sin x+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的符号.

§5 正弦函数的性质与图像

5.1 从单位圆看正弦函数的性质

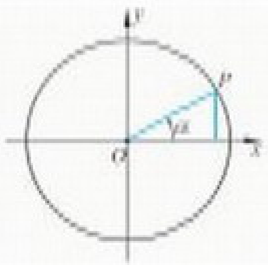


图 1-27

根据正弦函数 $y=\sin x$ 的定义，我们不难从单位圆（如图 1-27）看出正弦函数 $y=\sin x$ 有以下性质：

1. 定义域是全体实数；
2. 最大值是 1，最小值是 -1，值域是 $[-1,1]$；
3. 它是周期函数，其周期是 2π；
4. 在 $[0,2\pi]$ 上的单调性为：在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上增加的；在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上减少的；在 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上减少的；在 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上增加的.

思考交流

请根据正弦函数的定义，结合单位圆说明正弦函数具有上述性质的理由.

5.2 正弦函数的图像

说 明

所分的等份越细，画出的图像越精确.

在画正弦函数图像时，我们可以先画出 $[0,2\pi]$ 上的正弦函数的图像，再利用周期性将其延拓到整个定义域上，为此只需在区间 $[0,2\pi]$ 上取一系列的 x 值（x 的值取的越多越好），列表，例如：取 x 的值为 $0,\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\cdots,2\pi$，列表 1-6.

表 1-6

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\sin x$	0	0.37	0.71	0.92	1	0.92	0.71	0.37	0
x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
$\sin x$	−0.37	−0.71	−0.92	−1	−0.92	−0.71	−0.37	0	

利用表中的数据，在直角坐标系内描点，用光滑曲线连接，就可以得到$[0,2\pi]$上 $y=\sin x$ 的图像(如图 1-28).

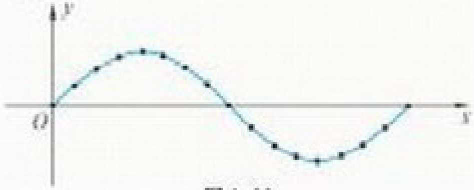


图 1-28

设任意角 α 的终边与单位圆交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，我们称线段 MP 为角 α 的**正弦线**.

如图 1-29 所示，在 x 轴上点$(-1,0)$的左侧任取一点 O_1，以 O_1 为圆心，单位长为半径作圆，对 x 的任意取值，例如，$x=\frac{\pi}{8}$，在$\odot O_1$中画出它的正弦线 MP，把 MP 向右平移，使点 M 与 x 轴上表示数 $\frac{\pi}{8}$ 的点 M_1 重合，得到线段 M_1P_1，显然点 P 和点 P_1 的纵坐标相同，都等于 $\sin\frac{\pi}{8}$. 因此，点 P_1 的坐标是 $\left(\frac{\pi}{8},\sin\frac{\pi}{8}\right)$，$P_1$ 是 $y=\sin x$ 图像上的一个点. 类似地，当 $x=\frac{11\pi}{8}$ 时，可以得到线段 M_2P_2，点 P_2 是 $y=\sin x$图像上的一个点.

图 1-29

如图 1-30 所示，以点 O_1 为圆心，单位长度为半径作圆，从$\odot O_1$与 x 轴的交点 A 起把$\odot O_1$分成 16 等份. 过各分点作 x 轴的垂线，可以得到对应于角 $0,\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\cdots,2\pi$ 等的正弦线，把这些角的正弦

线向右平移，使它们的起点与 x 轴上表示数 $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \cdots, 2\pi$ 的点重合，再用光滑曲线把这些正弦线的终点连接起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图像.

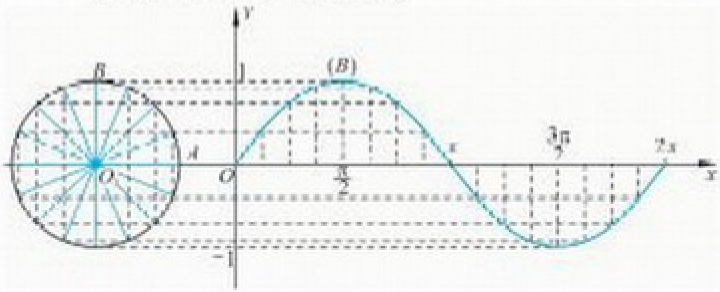


图 1-30

因为正弦函数是以 2π 为周期的周期函数，所以函数 $y=\sin x$ 在区间 $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ $(k\in \mathbf{Z}, k\neq 0)$ 上与在区间 $[0,2\pi]$ 上的函数图像形状完全一样，只是位置不同. 于是我们只要将函数 $y=\sin x$ $(x\in[0,2\pi])$ 的图像向左、向右平行移动（每次平移 2π 个单位长度），就可以得到正弦函数 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图像（如图 1-31）. 正弦函数的图像叫作**正弦曲线**.

图 1-31

图 1-31 给出了正弦曲线的基本形状，不难看出，在一个周期内，例如 $[0,2\pi]$，以下五个点起着关键的作用，它们是正弦曲线与 x 轴的交点和函数取最大值、最小值时的点.

$$(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0).$$

根据正弦曲线的基本形状，描出这五个点后，函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图像就基本上确定（如图 1-32）. 因此，在精确度要求不太高时，我们常常先找出这五个关键点，用光滑曲线将它们连接起来，得到这个函数的简图. 我们称这种画正弦曲线的方法为**“五点法”**.

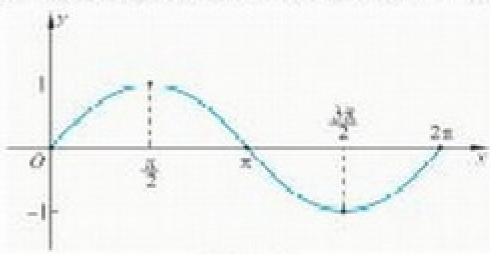


图 1-32

例 1 用五点法画出下列函数在区间$[0,2\pi]$上的简图.

(1) $y=-\sin x$； (2) $y=1+\sin x$.

解 (1)列表 1-7，描点得 $y=-\sin x$ 的图像(如图 1-33).

表 1-7

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=-\sin x$	0	-1	0	1	0

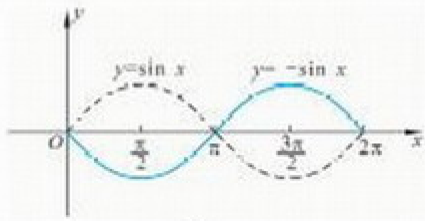


图 1-33

(2)列表 1-8，描点得 $y=1+\sin x$ 的图像(如图 1-34).

表 1-8

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

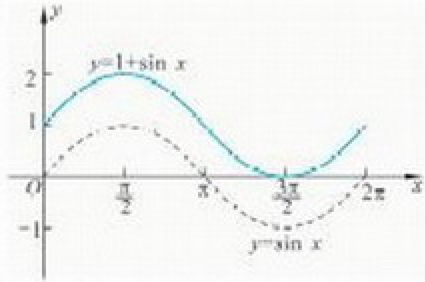


图 1-34

练 习

用五点法画出下列函数在区间$[0,2\pi]$上的简图.

(1) $y=2+\sin x$； (2) $y=\sin x-1$； (3) $y=3\sin x$.

5.3 正弦函数的性质

观察图 1-35，进一步研究正弦函数的性质.

图 1-35

(1) 定义域

正弦函数的定义域是 **R**.

(2) 值域

从单位圆(如图 1-27)可以看出,点 P 的纵坐标的最大值等于 1,最小值等于 -1;从正弦函数图像(如图 1-35)可以看出,正弦曲线夹在两条平行线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间. 所以,正弦函数的值域是 $[-1,1]$.

设集合 $A=\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,

当 $x\in A$ 时,函数取得最大值 1;反之,若函数达到最大值 1 时,$x\in A$.

当 $x\in B$ 时,函数取得最小值 -1;反之,若函数达到最小值 -1 时,$x\in B$.

(3) 周期性

正弦函数是周期函数,它的最小正周期为 2π.

由于正弦函数具有周期性,为了研究问题方便,我们可以选取任意一个 x 值,讨论区间 $[x, x+2\pi]$ 上的函数的性质,然后延拓到整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上.

(4)单调性

前面我们已经从单位圆中看到正弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的单调性,现在我们根据图像研究正弦函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性.

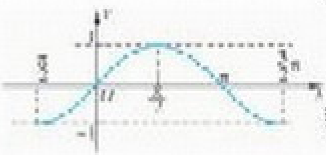


图 1-36

在 $y=\sin x$ 图像中,我们选取长度为 2π 的区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. 观察图 1-36 可以看出,当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1,当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时,$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1. 因此,正弦函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上增加的,在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上减少的. 由正弦函数的周期性可知,正弦函数在每一个区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是增加的,在每一个区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是减少的.

(5) 奇偶性

根据正弦函数的诱导公式 $\sin(-x)=-\sin x$,可知正弦函数是奇函数. 正弦函数的图像关于原点对称(如图 1-35).

思考交流

1. 利用单位圆和正弦函数的图像理解和记忆正弦函数的性质.

2. 利用正弦函数图像和诱导公式探索正弦函数图像的对称性.它有对称轴吗?有对称中心吗?如果有,请写出对称轴方程及对称中心的坐标,如果没有,请说明理由.

例 2　利用五点法画出函数 $y=\sin x-1$ 的简图,并根据图像讨论它的性质.

解　列表1-9,根据表中数据画出简图(如图 1-37).

表 1-9

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1

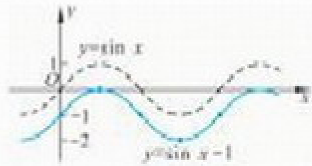


图 1-37

观察图像得出 $y=\sin x-1$ 的性质(见表1-10):

表 1-10

函数	$y=\sin x-1$
定义域	**R**
值域	$[-2,0]$
奇偶性	非奇非偶函数
周期性	2π
单调性	当 $x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时,函数是增加的; 当 $x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时,函数是减少的
最大值与最小值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,最大值为 0; 当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,最小值为 -2

练　习

1. 观察正弦曲线,写出满足 $\sin x>0$ 的区间.
2. 函数 $y=2+\sin x$ 在区间________上是增加的,在区间________上是减少的;当 $x=$________时,y 取最大值________;当 $x=$________时,y 取最小值________.
3. 函数 $y=4\sin x$,当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时,在区间________上是增加的,在区间________上是减少的;当 $x=$________时,y 取最大值________;当 $x=$________时,y 取最小值________.

习 题 1—5

A 组

1. 选择题.

(1) $y=1+\sin x$, $x\in[0,2\pi]$的图像与直线 $y=\frac{3}{2}$ 的交点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2) 当$x\in[-\pi,\pi]$时,函数$y=4\sin x$(　　).

A. 在$[-\pi,0]$上是增加的,在$[0,\pi]$上是减少的

B. 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是增加的,在$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是减少的

C. 在$[0,\pi]$上是增加的,在$[-\pi,0]$上是减少的

D. 在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$和$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$上是增加的,在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是减少的

2. 画出下列函数的简图,并根据图像和解析式讨论函数性质.

(1) $y=3+\sin x$ $(x\in[0,2\pi])$;　　(2) $y=2-\sin x$ $(x\in[0,2\pi])$.

3. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量x的集合,并分别写出最大值、最小值:

(1) $y=-4\sin x$;　　(2) $y=1-\frac{1}{3}\sin x$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{1+2\sin x}$;　　(2) $y=\sqrt{\frac{1}{2}+\sin x}$.

5. 求下列函数的单调区间:

(1) $y=1+2\sin x$;　　(2) $y=-\frac{1}{2}\sin x$.

6. 下列函数哪些是奇函数?哪些是偶函数?哪些既不是奇函数也不是偶函数?

(1) $y=1-\sin x$;　　(2) $y=-3\sin x$.

7. 正弦函数在整个定义域内是增函数吗?为什么?

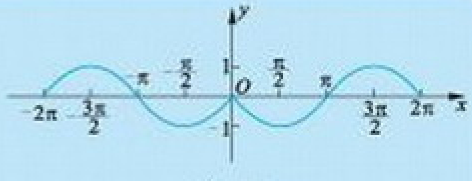
8. 请运用正弦函数图像总结正弦函数的性质及诱导公式.

B 组

1. 与图中曲线对应的函数是(　　).

A. $y=|\sin x|$　　B. $y=\sin|x|$

C. $y=-\sin|x|$　　D. $y=-|\sin x|$



(第1题)

2. 请画出函数 $y=\sin x-|\sin x|$ 的图像，你从图中发现此函数具备哪些性质？（可以利用五点法画图，也可以借助信息技术帮助你画图.）

§6 余弦函数的图像与性质

6.1 余弦函数的图像

建 议
你是否可以仿照作正弦函数图像那样，用几何方法画出余弦函数的图像？

由诱导公式 $y=\cos x=\cos(-x)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 可知，$y=\cos x$ 的图像就是函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 的图像. 从而，余弦函数 $y=\cos x$ 的图像可以通过将正弦曲线 $y=\sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到(如图 1-38).

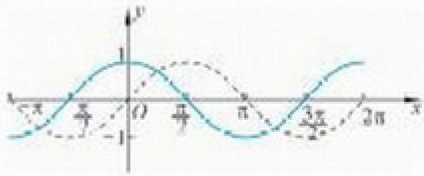


图 1-38

也可以利用描点法作出余弦函数的图像(如图 1-39). 余弦函数 $y=\cos x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的图像叫作**余弦曲线**.

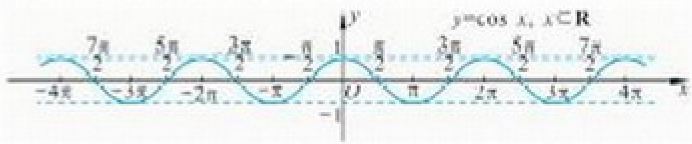


图 1-39

思考交流

(1) 类比学习正弦函数图像的方法，观察图 1-38，在函数 $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$的图像上，哪些点起着关键作用？并利用找到的关键点画出函数 $y=\cos x$在$x\in[0,2\pi]$上的简图.

(2) 试画出下列函数在区间$[0,2\pi]$上的简图.

① $y=2+\cos x$；　②$y=\cos x-1$；　③ $y=3\cos x$.

6.2　余弦函数的性质

类比对正弦函数性质的研究，观察图 1-39 可以得到余弦函数 $y=\cos x, x\in \mathbf{R}$有以下主要性质：

(1) 定义域

余弦函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

(2) 值域

余弦函数的值域是$[-1,1]$.

当 $x=2k\pi(k\in \mathbf{Z})$时，余弦函数取得最大值 1；

当 $x=(2k+1)\pi(k\in \mathbf{Z})$时，余弦函数取得最小值$-1$.

(3) 周期性

余弦函数是周期函数，它的最小正周期是 2π.

由于余弦函数具有周期性，为了研究问题方便，我们可以选取任意一个 x 值，讨论余弦函数在区间$[x, x+2\pi]$上的性质，然后延拓到整个定义域$(-\infty,+\infty)$上.

(4) 单调性

我们选取长度为 2π 的区间 $[-\pi,\pi]$. 可以看出，当 x 由 $-\pi$ 增大到 0 时，$\cos x$ 的值由-1 增大到 1，当 x 由 0 增大到 π 时，$\cos x$ 的值由 1 减小到-1. 因此，余弦函数在区间 $[-\pi,0]$ 上是增加的，在区间 $[0,\pi]$ 上是减少的. 由余弦函数的周期性可知，余弦函数在每一个区间 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ $(k\in \mathbf{Z})$ 上都是增加的，在每一个区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$$(k\in \mathbf{Z})$ 上都是减少的. 所以这两类闭区间的每一个都是余弦函数的单调区间.

(5) 奇偶性

观察余弦函数的诱导公式 $\cos(-x)=\cos x$，这表明余弦函数是**偶函数**. 余弦函数的图像关于 y 轴对称(如图 1-39).

例　画出函数 $y=\cos x-1$ 的简图，根据图像讨论函数的性质.

解　按五个关键点列表 1-11，描点画出图像(如图 1-40).

表 1-11

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1
$y=\cos x-1$	0	-1	-2	-1	0

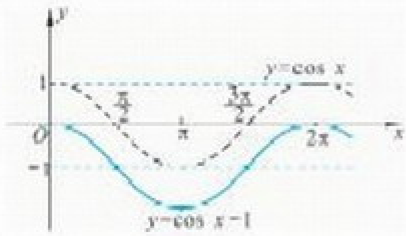


图 1-40

不难看出，函数 $y=\cos x-1$ 的主要性质有(见表 1-12)：

表 1-12

函 数	$y=\cos x-1$
定义域	$\mathbf{R}$
值 域	$[-2,0]$
奇偶性	偶函数
周期性	2π
单调性	当 $x\in[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 时，函数是增加的； 当 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$ 时，函数是减少的
最大值与最小值	当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，最大值为 0； 当 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，最小值为 -2

思考交流

根据余弦函数的图像，求满足 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的集合.

练 习

1. 观察余弦曲线，写出满足 $\cos x<0$ 的区间.
2. 阅读余弦函数的定义和§6.2 余弦函数的性质，根据图 1-19 中，点 P 随 α 的变化而变化，说明余弦函数的性质.
3. 画出下列函数的简图.
   (1) $y=\cos x+1(x\in\mathbf{R})$；　(2) $y=2\cos x(x\in\mathbf{R})$；　(3) $y=-\cos x(x\in[0,2\pi])$.
4. 函数 $y=1+\cos x$ 在区间 ________ 上是增加的，在区间 ________ 上是减少的；当 $x=$ ________ 时，y 取最大值 ________；当 $x=$ ________ 时，y 取最小值 ________.
5. 函数 $y=3\cos x$，当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，在区间 ________ 上是增加的，在区间 ________ 上是减少的；当 $x=$ ________ 时，y 取最大值 ________；当 $x=$ ________ 时，y 取最小值 ________.

习 题 1—6

A　组

1. 选择题.

(1) $y=\cos x$, $x\in[0,2\pi]$的图像与直线 $y=\frac{1}{3}$ 的交点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$时, 函数 $y=2\cos x$(　　).

A. 在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上是增加的, 在$[0,\pi]$上是减少的

B. 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是增加的, 在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是减少的

C. 在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上是减少的, 在$[0,\pi]$上是增加的

D. 在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上是增加的, 在$[0,\pi]$上是减少的

(3) 下列命题中正确的是(　　).

A. 函数 $y=\cos x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是减少的　　B. 函数 $y=\cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上是减少的

C. 函数 $y=\cos x$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上是减少的　　D. 函数 $y=\cos x$ 在 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 上是减少的

(4) 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是增加的区间是(　　).

A. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[2k\pi-\pi,2k\pi-\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

2. 画出下列函数的简图, 并根据图像和解析式讨论函数性质.

(1) $y=3+\cos x$ $(x\in[0,2\pi])$;　　(2) $y=2-\cos x$ $(x\in[0,2\pi])$.

3. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量 x 的集合, 并分别写出最大值、最小值:

(1) $y=-\frac{2}{3}\cos x$;　　(2) $y=1+\frac{3}{4}\cos x$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{1-\cos x}$;　　(2) $y=\sqrt{-\cos x}$.

5. 求下列函数的单调区间:

(1) $y=1+\frac{1}{2}\cos x$;　　(2) $y=-\frac{2}{3}\cos x$.

6. 下列函数哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些既不是奇函数也不是偶函数?

(1) $y=1-\cos x$;　　(2) $y=|\cos x|$.

7. 余弦函数在整个定义域内是减函数吗? 为什么?

8. 请运用余弦函数图像总结余弦函数的性质及诱导公式.

B 组

1. 在同一直角坐标系内画正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像，并回答下列问题：

   (1) 写出满足 $\sin x=\cos x$ 的 x 的值；

   (2) 写出满足 $\sin x>\cos x$ 的 x 的取值范围；

   (3) 写出满足 $\sin x<\cos x$ 的 x 的取值范围；

   (4) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，分别写出满足 $\sin x=\cos x$，$\sin x>\cos x$，$\sin x<\cos x$ 的 x 的集合.

2. 请画出函数 $y=\cos x-|\cos x|$的图像，你从图中发现此函数具备哪些性质？（可以利用五点法画图，也可以借助信息技术帮助你画图.）

§7　正切函数

7.1　正切函数的定义

在前两节中，我们学习了任意角的正弦函数、余弦函数，并借助它们的图像研究其性质. 下面我们类比正弦函数、余弦函数的学习方法，在直角坐标系内学习任意角的正切函数.

在直角坐标系中（如图 1-41），如果角 α 满足：$\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，那么，角 α 的终边与单位圆交于点 $P(a,b)$，唯一确定比值 $\frac{b}{a}$. 根据函数的定义，比值 $\frac{b}{a}$ 是角 α 的函数，我们把它叫作角 α 的**正切函数**，记作 $y=\tan\alpha$，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

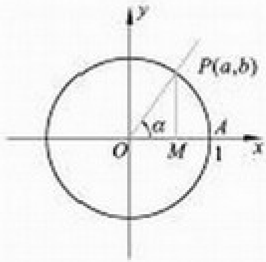


图 1-41

根据正切函数与正弦函数、余弦函数的定义，不难看出：

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\ (\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z})$$

由此可知，正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以比值为函数值的函数. 我们统称它们为三角函数.

> **说　明**
>
> 在图 1-41 中，比值 $\frac{a}{b}$ 叫作角 α 的余切函数，记作 $y=\cot\alpha$，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

根据正切函数的定义，我们知道：当角在第一和第三象限时，其正切函数值为正；当角在第二和第四象限时，其正切函数值为负.

下面我们主要讨论正切函数的性质.

首先，我们给出正切函数值的一种几何表示.

如图 1-42，在直角坐标系中，设单位圆与 x 轴正半轴的交点为：$A(1,0)$，任意角 α 的终边与单位圆交于点 P，过点 $A(1,0)$ 作 x 轴的垂线，与角的终边或终边的延长线相交于点 T. 从图中容易看出：当角 α 位于第一和第三象限时，点 T 位于 x 轴的上方；当角 α 位于第二和第四象限时，点 T 位于 x 轴的下方. 过点 P 作 x 轴的垂线，与 x 轴交于点 M，那么，不论角 α 的终边在第几象限，都有 $\angle AOT$ 与 $\angle MOP$ 的正切值相等. 我们称线段 AT 为角 α 的**正切线**.

如图 1-43，45° 和 225° 的正切线都是线段 AT. 也就是说：

$$\tan 45^\circ=\tan 225^\circ.$$

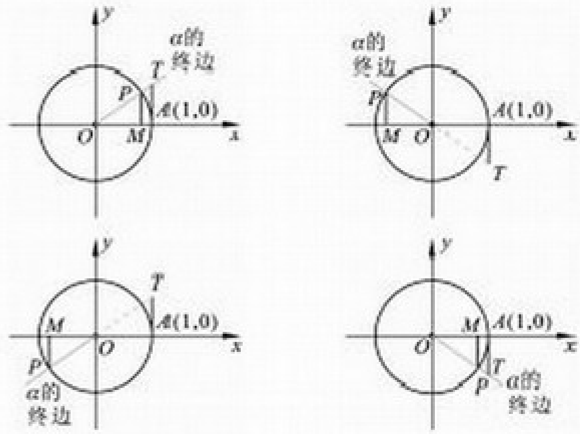


图 1-42

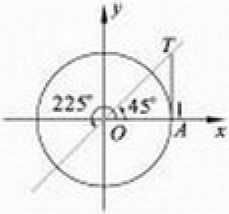


图 1-43

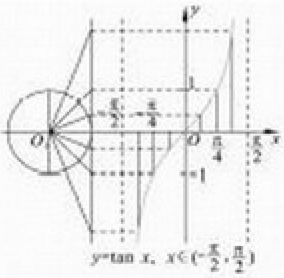
由正弦函数、余弦函数的诱导公式可得：

$$\tan(x+k\pi)=\frac{\sin(x+k\pi)}{\cos(x+k\pi)}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x, \qquad (1.15)$$

其中，$x\in\mathbf{R}$，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以，$k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$是正切函数的周期，$\pi$ 是它的最小正周期.

7.2 正切函数的图像与性质

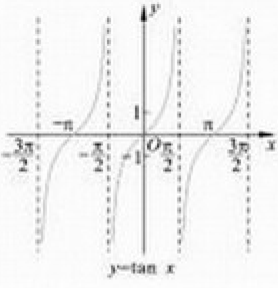


$y=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

图 1-44

下面我们类比画正弦函数图像的方式，利用正切线画出正切函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像(如图 1-44).

根据正切函数的周期性，我们可以把上述图像向左、右延伸，得到正切函数 $y=\tan x(x\in\mathbf{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的图像(如图 1-45)，称其为正切曲线.



$y=\tan x$

图 1-45

从图 1-45 可以看出，正切曲线是由被相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$隔开的无穷多支曲线组成的. 这些直线叫作正切曲线各支的渐近线.

观察图 1-45，不难看出正切函数 $y=\tan x$ ($x\in\mathbf{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$)的主要性质为：

(1) 定义域

$$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

（2）值域

当 $x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 且 x 无限接近于 $\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$\tan x$ 无限增大；当 $x>\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 且 x 无限接近于 $\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\tan x$ 无限减小. 这就是说，$\tan x$ 可以取任意实数值. 即正切函数的值域是实数集 $\mathbf{R}$.

（3）周期性

正切函数是周期函数，周期是 $k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq 0)$，最小正周期是 π.

（4）奇偶性

正切曲线关于原点 O 对称. 由 $\tan(-x)=-\tan x$，可知正切函数是奇函数.

（5）单调性

正切函数在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上是增加的.

动手实践

请画出函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，并通过图像讨论该函数的性质.

* 仿照画正切函数 $y=\tan x\left(x\in\mathbf{R},x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$ 图像的方法，画出余切函数 $y=\cot x(x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的图像.

7.3　正切函数的诱导公式

问题提出

观察图 1-46，当 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，角 α 与角 $2\pi+\alpha$，$2\pi-\alpha$，$\pi-\alpha$，$\pi+\alpha$，$-\alpha$ 的正切函数值有什么关系？

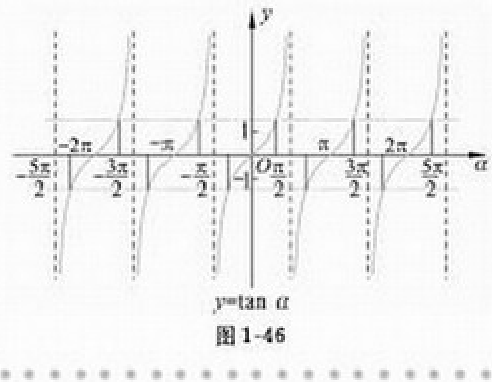


图 1-46

我们可以归纳出以下公式：

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha; \tag{1.16}$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha; \tag{1.17}$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha; \tag{1.18}$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha; \tag{1.19}$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha. \tag{1.20}$$

实际上，无论角 α 是哪个象限的角，上面的诱导公式都是正确的，有兴趣的同学可以自己验证.

信息技术建议

利用数学软件或图形计算器分别绘制函数 $y=\tan x$ 与 $y=\tan(2\pi+x)$，$y=\tan x$ 与 $y=\tan(-x)$，$y=\tan x$ 与 $y=\tan(2\pi-x)$，$y=\tan x$ 与 $y=\tan(\pi-x)$，$y=\tan x$ 与 $y=\tan(\pi+x)$ 的图像，观察同一自变量值所对应不同函数的函数值之间的关系，归纳得出诱导公式.

思考交流

* 利用学习过的诱导公式证明以下公式：

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha; \tag{1.21}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha. \tag{1.22}$$

公式 1.16～1.22 都叫作正切函数的诱导公式. 其中角 α 可以为使等式两边都有意义的任意角.

我们可以利用诱导公式，将任意角的三角函数问题转化为锐角三角函数的问题.

参考下面的框图，想想每次变换应该运用哪些公式.

$$\boxed{\text{任意角的三角函数}} \xrightarrow{(\qquad)} \boxed{0\sim2\pi\text{ 的角的三角函数}} \xrightarrow{(\qquad)} \boxed{\text{锐角的三角函数}}$$

例 1 若 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$，借助三角函数定义求角 α 的正弦函数值和余弦函数值.

解 因为 $\tan\alpha=\frac{2}{3}>0$，所以，α 是第一或第三象限的角.

(1) 如果 α 是第一象限的角，则由 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ 可知，角 α 终边上必有一点 $P(3,2)$. 所以 $x=3$，$y=2$.

因为 $r=|OP|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，所以

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

(2) 如果α是第三象限的角，则由$\tan\alpha=\frac{2}{3}$可知，角α终边上必有一点$P(-3,-2)$. 所以$x=-3, y=-2$.

可知 $r=|OP|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-2}{\sqrt{13}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

例2 求$\frac{\tan 315^\circ+\tan 570^\circ}{\tan(-60^\circ)-\tan 675^\circ}$的值.

解 原式$=\frac{-\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{-\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}$

$$=\frac{-1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\sqrt{3}+1}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

练　习

1. 观察正切曲线，写出满足下列条件的x的取值范围.

(1) $\tan x>0$;　　(2) $\tan x=0$;　　(3) $\tan x<0$.

2. 求函数$y=\tan 3x$的定义域.

3. (1) 正切函数在整个定义域内是增加的吗？为什么？

(2) 正切函数会不会在某一区间内是减少的？为什么？

4. 不求值，比较下列各组中两个正切函数值的大小.

(1) $\tan 138^\circ$与$\tan 143^\circ$;　　(2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$与$\tan\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

习题 1—7

A　组

1. 已知$P(x,3)$是角θ终边上一点，且$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，求$x$的值.

2. 若角α的顶点在原点，始边与x轴的正半轴重合，终边落在直线$y=-4x$上，且$x\leqslant 0$，求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的值.

3. 确定下列式子的符号：

(1) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{11\pi}{6}$；　(2) $\sin 273^\circ\tan 125^\circ$；　(3) $\frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ}$；　(4) $\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\tan\frac{11\pi}{6}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$.

4. 已知角 α 的终边经过下列各点，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

(1) $(-3,-4)$；　(2) $(-\sqrt{3},1)$；　(3) $(5,-12)$.

5. 化简：

(1) $p\sin\pi+q\cos\frac{\pi}{2}+k\tan 2\pi$；

(2) $-p^2\tan 135^\circ+q^2\sin 90^\circ-2pq\cos 0^\circ$；

(3) $a^2\tan\frac{\pi}{4}-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\tan\frac{5\pi}{4}$；

(4) $m\tan\pi+n\cos\frac{\pi}{2}-p\sin\pi-q\cos\frac{3\pi}{2}-r\sin 2\pi$.

6. 求下列三角函数值：

(1) $\cos\frac{7\pi}{6}$；　(2) $\sin 263^\circ 42'$；　(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；　(4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$；

(5) $\sin 4$；　(6) $\tan 240^\circ$；　(7) $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$；　(8) $\tan(-1\ 574^\circ)$；

(9) $\sin 2\ 460^\circ$；　(10) $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

7. 化简：

(1) $\tan 675^\circ+\tan 765^\circ+\tan(-300^\circ)+\tan(-690^\circ)+\tan 1\ 080^\circ$；

(2) $1+\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-2\cos^2(-\alpha)$；

(3) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(3\pi-\alpha)\tan(-\alpha-\pi)\tan(\alpha-2\pi)}{\tan(4\pi-\alpha)\sin(5\pi+\alpha)}$.

8. 已知 $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\frac{1}{4}$，且 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，求 $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ 的值.

9. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，求 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$ 的值.

10. 求值：$\sqrt{1+\tan^2\left(-\frac{37}{6}\pi\right)-2\tan\left(-\frac{43}{6}\pi\right)}$.

B　组

1. 设 α 是锐角，利用单位圆证明：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$；　(2) $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

2. 利用函数图像和单位圆两种方法，分别求出 θ 的取值范围.

(1) $\tan\theta>-1$；　(2) $\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(3) $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 化简：$\tan(18^\circ+\alpha)\tan(370^\circ-\alpha)\tan(72^\circ-\alpha)\tan(280^\circ-\alpha)$.

4. 在同一坐标系中，画出函数 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图像，依据图像回答以下问题：

(1) 写出这两个函数图像交点的坐标；

(2) 写出使 $\tan x>\sin x$ 成立的 x 的取值范围；

(3) 写出使 $\tan x=\sin x$ 成立的 x 的取值范围；

(4) 写出使 $\tan x<\sin x$ 成立的 x 的取值范围；

(5) 写出使这两个函数具有相同的单调性的区间.

§8 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像

问题提出

在物理和工程技术的许多问题中，经常会遇到形如

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

的函数(其中 A,ω,φ 是常数). 例如：在简谐振动中位移与时间的函数关系就是形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数. 这个函数有什么性质？它与函数 $y=\sin x$ 有什么关系？

注 意

如果不作特别说明，本书所讨论的所有函数，其定义域均为使函数有意义的一切实数的集合.

显然，函数 $y=\sin x$ 是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的特殊情况，其中 $A=1,\omega=1,\varphi=0$.

下面我们利用函数 $y=\sin x$ 的性质和图像来研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质和图像. 分析在函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中，参数 A,ω,φ 对函数及其图像的影响.

先看一些实际例子.

例 1 作函数 $y=2\sin x$ 和$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的简图，并说明它们与函数 $y=\sin x$ 的关系.

解 (1) 列表.

表 1-13

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=2\sin x$	0	2	0	-2	0
$y=\frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0

(2) 画图.

利用“五点法”画出函数 $y=2\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 在$[0, 2\pi]$上的简图(如图 1-47).

从函数图像和解析式可以看到，对于同一个 x 值，$y=2\sin x$ 的函数值是$y=\sin x$ 的函数值的 2 倍，反映在图像上，是 $y=\sin x$ 图像上每个点的横坐标不变，而纵坐标伸长为原来的 2 倍，就得到

$y=2\sin x$的图像. 类似地,对于同一个 x 值,$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的函数值是 $y=\sin x$的函数值的$\frac{1}{2}$,反映在图像上,是 $y=\sin x$ 图像上每个点的横坐标不变,而纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,就得到 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图像.

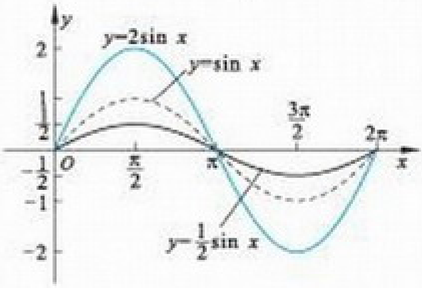


图 1-47

(3) 确定周期.

令 $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=2\sin x$, $f_3(x)=\frac{1}{2}\sin x$. 从 $f_1(x)$到$f_2(x)$, $f_3(x)$,函数的周期是否发生了变化?

根据诱导公式 1.8 和周期函数的定义,不难看出这三个函数的周期没有变化,都是 2π. 利用周期性,把$[0,2\pi]$上的简图向左、右延伸就可以得到函数 $y=2\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 在 **R** 上的图像.

(4) 讨论性质.

从图像上可看出,在区间$[0,2\pi]$上,函数 $y=2\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上是增加的,在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上是减少的;

函数 $y=2\sin x$ 与 x 轴交点的横坐标是 $0,\pi,2\pi$;

函数 $y=2\sin x$ 的值域是$[-2,2]$,最大值是 2,最小值是 -2.

类似地,在区间$[0,2\pi]$上,函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上是增加的,在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上是减少的;

函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 与 x 轴交点的横坐标是 $0,\pi,2\pi$;

函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$的值域是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,最大值是$\frac{1}{2}$,最小值是$-\frac{1}{2}$.

由例 1 可以看出:在函数 $y=A\sin x(A>0)$中,A 决定了函数的值域以及函数的最大值和最小值,通常称 A 为**振幅**.

思考交流

将 $y=\sin x$ 的图像作怎样的变换就可以得到函数 $y=A\sin x$ $(A>0)$的图像？请将思考的结果填在图 1-48 的括号内.

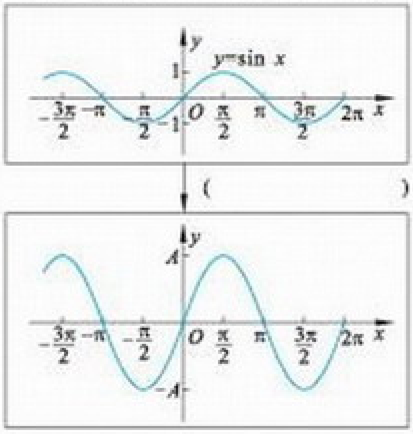


图 1-48

例 2 画出函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的简图，并说明它们与函数 $y=\sin x$ 的关系.

解 (1) 列表.

表 1-14

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$x+\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$y=\sin x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

表 1-15

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}$
$x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	2π	$\frac{7}{3}\pi$
$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$y=\sin x$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

（2）画图.

利用"五点法"画出函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]\right)$ 和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]\right)$ 的简图（如图 1-49）.

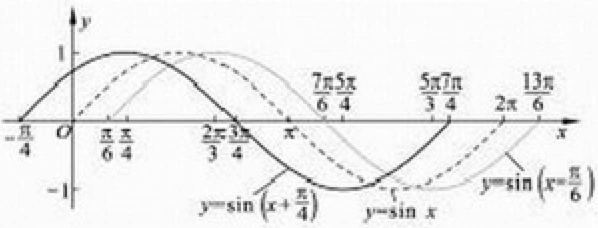


图 1-49

从函数图像和解析式可以看出，把函数 $y=\sin x$ 图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度就可以得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像；把函数 $y=\sin x$ 图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度就可以得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像.

（3）确定周期.

令 $f_1(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$f_2(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. 从 $y=\sin x$ 到 $f_1(x)$，$f_2(x)$，函数的周期是否发生了变化?

根据诱导公式 1.8 和周期函数的定义，不难看出这三个函数的周期仍是 2π. 利用周期性，将简图分别向左、右延伸就可以得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像.

（4）讨论性质.

从图像上可看出，在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ 上，函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ 上是增加的，在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上是减少的；

函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 与 x 轴的交点的横坐标为 $-\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$；

函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $[-1,1]$，最大值是 1，最小值是 -1.

类似地，在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$ 上，函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$ 上是增加的，在 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ 上是减少的；

函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 与 x 轴的交点的横坐标为 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6}$；

函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值域为 $[-1,1]$，最大值是 1，最小值是 -1.

由例 2 可以看出：在函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 中，φ 决定了 $x=0$ 时的函数值，通常称 φ 为**初相**，$x+\varphi$ 为**相位**.

抽象概括

将 $y=\sin x$ 的图像作怎样的变换就可以得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像？请将思考的结果填在图 1-50 的括号内.

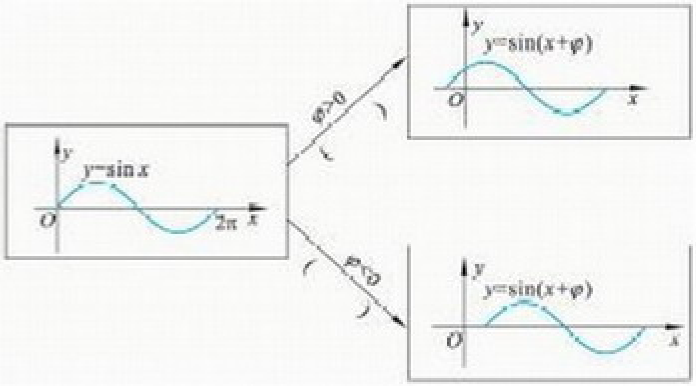


图 1-50

练 习 1

1. 函数 $y=\frac{2}{3}\sin x$ 的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像有什么关系？
2. 函数 $y=\sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$ 的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像有什么关系？
3. 利用"五点法"作出下列函数的简图，并分别说明每个函数的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像有什么关系.

(1) $y=\frac{1}{3}\sin x$；　　(2) $y=4\sin x$；

(3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$；　　(4) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

例 3　画出函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的简图，并说明它们与函数 $y=\sin x$ 的关系.

解　(1) 列表.

表 1-16

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$y=\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$y=\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

表 1-17

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y=\sin\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

(2) 画图.

用"五点法"画出函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的简图(如图1-51).

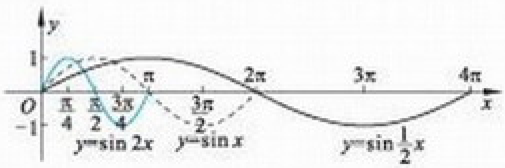


图 1-51

从函数图像和解析式可以看到,只要将函数 $y=\sin x$ 图像上的每个点的横坐标都缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,就得到 $y=\sin 2x$ 的图像.

将 $y=\sin x$ 图像上每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍,纵坐标不变,就可得到函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图像.

(3)确定周期.

令 $f_1(x)=\sin 2x$, $f_2(x)=\sin\frac{1}{2}x$.

拓　展

如何确定函数 $y=\sin\omega x$ 的周期呢?假设 $y=\sin\omega x$ ($\omega>0$)的周期为 T,根据周期函数的定义,有: $\sin\omega(x+T)=\sin\omega x$. 于是 $\sin(\omega x+\omega T)=\sin\omega x$ ①. 而由 $\sin x$ 的周期是 2π,可知:当 $\omega T=2\pi$ 时,①式成立,所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 我们不难验证, $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 为 $y=\sin\omega x$ 的最小正周期.

根据周期函数的定义，我们不难看出：

$f_1(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x=f_1(x)$；

$f_2(x+4\pi)=\sin\frac{1}{2}(x+4\pi)=\sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}x=f_2(x)$.

所以，π 是函数 $y=\sin 2x$ 的周期. 实际上，π 是函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期. 由函数 $y=\sin 2x$ 的周期性，把简图向左、右延伸就可以得到函数 $y=\sin 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像. 4π 是函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的周期，实际上，4π 是函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的最小正周期. 由函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的周期性，把简图向左、右延伸就可以得到函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像.

(4) 讨论性质.

从图像上可看出，在区间 $[0,\pi]$ 上，函数 $y=\sin 2x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 和 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上是增加的，在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上是减少的；

函数 $y=\sin 2x$ 与 x 轴的交点的横坐标为 $0,\frac{\pi}{2},\pi$；

函数 $y=\sin 2x$ 的值域为 $[-1,1]$，最大值是 1，最小值是 -1.

类似地，在区间 $[0,4\pi]$ 上，函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 在 $[0,\pi]$ 和 $[3\pi,4\pi]$ 上是增加的，在 $[\pi,3\pi]$ 上是减少的；

函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 与 x 轴交点的横坐标为 $0,2\pi,4\pi$；

函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的值域为 $[-1,1]$，最大值是 1，最小值是 -1.

由例 3 可以看出：在函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 中，ω 决定了函数的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 通常称周期的倒数 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 为频率.

由以上例题我们得出，讨论任意一个三角函数时，可以按以下几个步骤进行：列表、画图、确定周期、讨论性质. 实际上，这是讨论周期函数的一般方法和步骤.

思考交流

将函数 $y=\sin x$ 的图像作怎样的变换就可以得到函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的图像？函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的周期是多少？请将

你思考的结果填在图 1-52 的括号内.

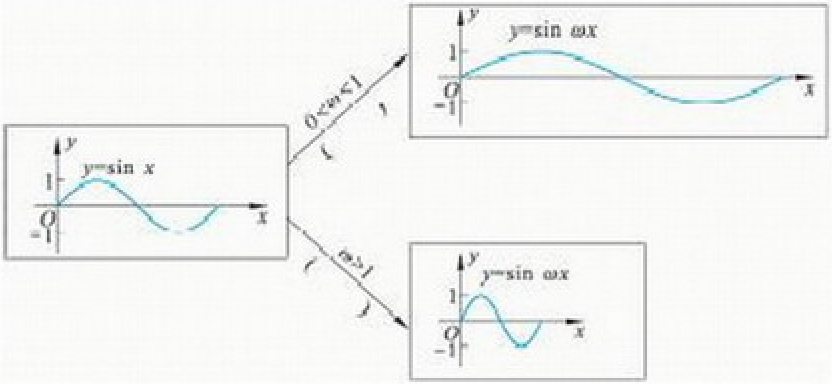


图 1-52

下面我们通过具体实例，体会如何利用 $y=\sin x$ 来研究 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的图像和性质.

例 4　画出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的简图.

解　我们按以下几个步骤来得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图像.

(1) 从函数 $y=\sin x$ 的图像得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像.

在本节例 3 中，我们已经知道函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 中的 ω 决定了函数的周期. 函数 $y=\sin 2x$ 的振幅和函数 $y=\sin x$ 的振幅相同，周期是 π，是函数 $y=\sin x$ 的周期的 $\frac{1}{2}$，因此，只需将函数 $y=\sin x$ 的图像上每个点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变就可以得到 $y=\sin 2x$ 的图像(如图 1-53).

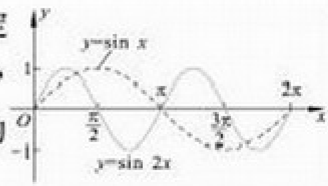


图 1-53

(2) 从函数 $y=\sin 2x$ 的图像得出函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像.

我们在前面知道，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像是 $y=\sin x$ 的图像向左平移而得到的. 当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ 和 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 处的值相同，即 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像是 $y=\sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到的.

同样，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像也是 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移得

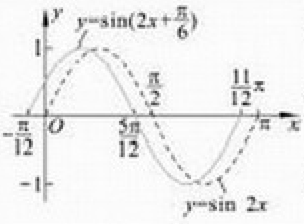


图 1-54

到的. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，当 $x=-\frac{\pi}{12}$时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ 和 $y=\sin 2x$ 在 $x=0$ 时的值相同. 即 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像是 $y=\sin 2x$的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$得到的(如图 1-54).

(3) 从函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像得出函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像.

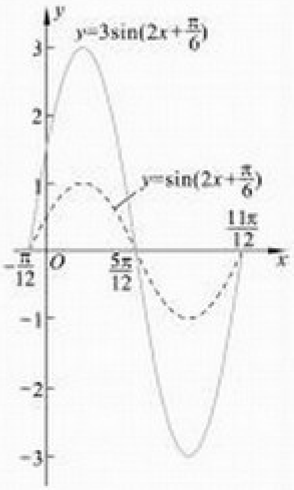


图 1-55

在本节例 1 中，我们已经知道函数 $y=A\sin x(A>0)$的振幅 A 决定了函数的最大值和最小值. 因此，只需将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像的纵坐标伸长为原来的 3 倍，横坐标不变，就可以得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像(如图 1-55).

(4) 从函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$的图像.

将函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像沿 y 轴方向向上平移 1 个单位长度就可以得到函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图像(如图 1-56).

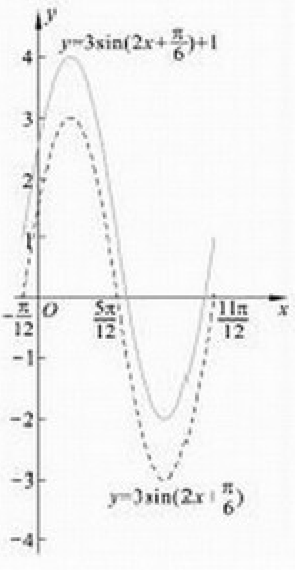


图 1-56

抽象概括

不难看出，这种作图的方法具有一般性. 可以按照以下步骤作出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的图像.

第一步：作出函数 $y=\sin x$ 的图像；

第二步：从函数 $y=\sin x$ 的图像得出函数 $y=\sin \omega x$ 的图像；

第三步：从函数 $y=\sin \omega x$ 的图像得出函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图像；

第四步：从函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图像得出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像；

第五步：从函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的图像.

这一过程用框图表示见图 1-57：

这些步骤充分体现了从简单到复杂，从特殊到一般的化归思想.

从这个作图过程，不难看出：

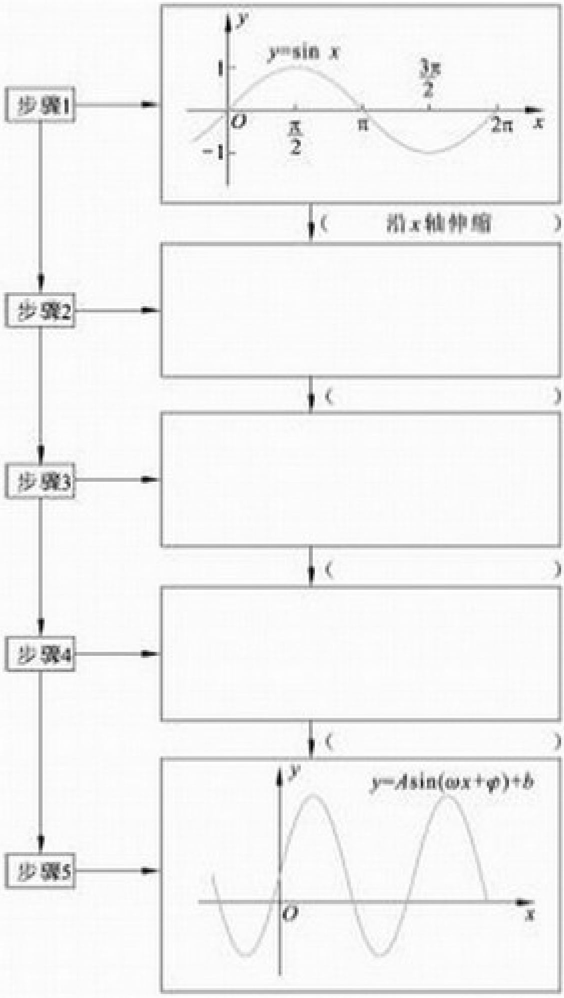


图 1-57

ω 决定了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的周期$\left(周期\ T=\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$；

φ 决定了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的初相(初相 φ)；

A 和 b 决定了函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的值域和振幅(振幅 A，值域$[-A+b,A+b]$).

思考交流

如果在上述过程中，把第二步“将 $y=\sin x$ 图像上各点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍”，即“沿 x 轴伸缩”改为“沿 x 轴平行移动”，以后的各步变换应该作怎样的调整，才能从函数 $y=\sin x$ 的图像得到

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$$

的图像？请仿照上面的做法，用框图来表示这个变换的过程.

练习 2

1. 函数 $y=\sin\frac{3}{4}x$ 的周期是多少？它的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像有什么关系？
2. 作下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图.

 (1) $y=\sin 4x$； (2) $y=\sin\frac{3}{2}x$； (3) $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$； (4) $y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$.
3. 选择题.

 (1) 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图像，只需将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 图像上的每个点（　　）.

 A. 横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变　　B. 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变

 C. 纵坐标伸长为原来的 2 倍，横坐标不变　　D. 纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，横坐标不变

 (2) 为了得到函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需将 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图像上每一个点（　　）.

 A. 横坐标向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　B. 横坐标向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

 C. 横坐标向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度　　D. 横坐标向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

例 5　求下列函数的最大值、最小值，以及达到最大值、最小值时 x 值的集合.

(1) $y=\sin x-2$；

(2) $y=\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}x$；

(3) $y=\frac{1}{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

解　(1) 当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin x$ 取最大值 1，此时函数 $y=\sin x-2$ 取最大值 -1；

当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin x$ 取最小值 -1，此时函数 $y=\sin x-2$ 取最小值 -3.

(2) 设 $u=\frac{1}{2}x$.

当 $u=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，即 $x=4k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin\frac{1}{2}x$ 取最大值 1，此时函数 $y=\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}x$ 取最大值 $\frac{4}{3}$；

当 $u=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，即 $x=4k\pi+3\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin\frac{1}{2}x$ 取最小值 -1，此时函数 $y=\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}x$ 取最小值 $-\frac{4}{3}$.

(3) 设 $u=3x+\frac{\pi}{4}$.

当 $u=2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)时，即 $x=\frac{2}{3}k\pi-\frac{\pi}{12}$ ($k\in\mathbf{Z}$)时，$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$取最大值1，此时函数 $y=\frac{1}{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$取最大值$\frac{1}{2}$；

当 $u=2k\pi+\pi$($k\in\mathbf{Z}$)时，即 $x=\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{4}$($k\in\mathbf{Z}$)时，$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$取最小值$-1$，此时函数 $y=\frac{1}{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$取最小值$-\frac{1}{2}$.

例6　(1) 求函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$的递增区间；

(2) 求函数 $y=\frac{1}{3}\cos\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)$的递减区间.

解　(1) 设 $u=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}$.

因为函数 $\sin u$ 的递增区间是$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$($k\in\mathbf{Z}$)，由

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

得

$$4k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z}),$$

所以，函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$的递增区间是

$$\left[4k\pi-\frac{\pi}{3},4k\pi+\frac{5\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z}).$$

(2) 设 $u=4x+\frac{5\pi}{6}$.

因为函数 $\cos u$ 的递减区间是$[2k\pi,2k\pi+\pi]$($k\in\mathbf{Z}$)，由

$$2k\pi\leqslant 4x+\frac{5\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z}),$$

得

$$\frac{1}{2}k\pi-\frac{5\pi}{24}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z}),$$

所以，函数 $y=\frac{1}{3}\cos\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)$的递减区间是

$$\left[\frac{1}{2}k\pi-\frac{5\pi}{24},\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{24}\right](k\in\mathbf{Z}).$$

练 习 3

1. 求下列函数的最小值以及取最小值时的 x 值的集合.

(1) $y=-\frac{3}{2}\cos x$；　　(2) $y=4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. 求下列函数的周期.

(1) $y=\sin 3x$；　　(2) $y=\cos\frac{x}{2}$；

(3) $y=\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=6.7\sin\pi x$.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$是否成立？如果成立，能否说$\frac{2\pi}{3}$是函数$y=\sin x$的周期？为什么？

4. 填空题.

(1) 函数 $y=0.75\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in[-\pi,\pi])$的递减区间是__________；

(2) 函数 $y=\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)(x\in[0,2\pi])$的递增区间是__________；

(3) 函数 $y=\frac{3}{5}\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$的递增区间是____________.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)(x\in\mathbf{R})$；　　(2) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)(x\in\mathbf{R})$.

习 题 1—8

A 组

1. 选择题.

(1) 为了得到函数 $y=\cos\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的图像，只需将余弦函数图像上各点(　　).

A. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度　　B. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{1}{3}$个单位长度　　D. 向右平移$\frac{1}{3}$个单位长度

(2) 为了得到函数 $y=\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图像，只需将函数 $y=\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像上各点(　　)即可.

A. 横坐标伸长为原来的$\frac{4}{3}$倍，纵坐标不变　　B. 横坐标缩短为原来的$\frac{3}{4}$倍，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长为原来的$\frac{4}{3}$倍，横坐标不变　　D. 纵坐标缩短为原来的$\frac{3}{4}$倍，横坐标不变

(3) 将函数 $y=\cos\left(2x+\frac{4\pi}{5}\right)$ 的图像上各点向右平行移动 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再把横坐标缩短为原来的一半，纵坐标伸长为原来的 4 倍，则所得到的图像的函数解析式是(　　).

A. $y=4\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)$　　B. $y=4\cos\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)$

C. $y=4\sin\left(4x+\frac{4\pi}{5}\right)$　　D. $y=-4\sin\left(4x+\frac{4\pi}{5}\right)$

2. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=4\sin\frac{1}{3}x$；　　(2) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$；

(3) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=\frac{5}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

3. 不画图，写出下列函数的振幅、周期和初相，并说明这些函数的图像可以由正弦曲线经过怎样的变换得到.

(1) $y=5\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{8}\right)$；　　(2) $y=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{5}x-\frac{\pi}{7}\right)$；

(3) $y=8\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$；　　(4) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{10}\right)$.

4. 将函数 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{2}\right)$ 的图像作怎样的变换可以得到函数 $y=\cos x$ 的图像？

5. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{5}x-\frac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}x\right)$；

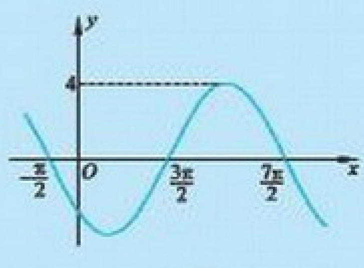
(3) $y=\frac{1}{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(4) $y=3\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. 求下列函数的最大值、最小值以及达到最大(小)值时 x 的值的集合：

(1) $y=\frac{3}{2}\sin\left(2\pi x+\frac{4\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=-6\sin(2.5x+2)+2$.

B　组

1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<2\pi)$ 一个周期的图像如图所示，试确定 A,ω,φ 的值.

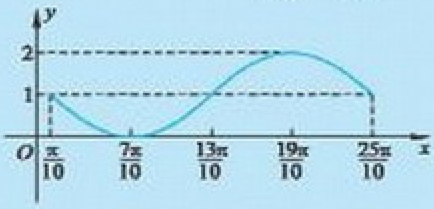


(第 1 题)

2. 函数 $y=f(x)$的图像如图所示，则 $y=f(x)$的解析式可能是(　　).

A. $y=\sin\frac{5}{6}x-2$　　B. $y=2\cos 3x-1$

C. $y=\sin\left(\frac{5}{6}x+\frac{\pi}{12}\right)$　　D. $y=1-\sin\left(\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{12}\right)$



(第 2 题)

3. 有以下四种变换方式：

① 向左平行移动$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$；

② 向右平行移动$\frac{\pi}{8}$个单位长度，再将每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$；

③ 每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，再向右平行移动$\frac{\pi}{8}$个单位长度；

④ 每个点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，再向左平行移动$\frac{\pi}{8}$个单位长度.

其中能将函数 $y=\sin x$ 的图像变为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像的是(　　).

A. ①和④　　B. ①和③　　C. ②和④　　D. ②和③

4. 用“描点法”画函数 $y=\sin x+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的图像，依据图像讨论函数的性质.

5. 用“五点法”画函数 $y=1-\sin 3x$，$x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$的图像，是否能求出该函数图像与直线 $x=\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{5\pi}{3}$及 x 轴所围成的图像的面积?

§9 三角函数的简单应用

我们已经知道周期现象是自然界中最常见的现象之一，三角函数是研究周期现象最重要的数学模型. 在这一节，我们将通过实例，让同学们初步体会如何利用三角函数研究简单的实际问题.

例 水车问题

水车是一种利用水流的动力进行灌溉的工具，图 1-58 是一个水车工作的示意图，它的直径为 3 m，其中心(即圆心)O 距水面 1.2 m，如果水车逆时针匀速旋转，旋转一圈的时间是 $\frac{4}{3}$ min. 在水车轮边缘上取一点 P，点 P 距水面的高度为 h(m).

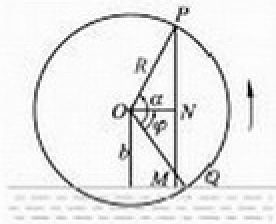


图 1-58

(1) 求 h 与时间 t 的函数解析式，并作出这个函数的简图.

(2) 讨论如果雨季河水上涨或旱季河流水量减少时，所求得的函数解析式中的参数将会发生哪些变化. 若水车转速加快或减慢，函数解析式中的参数又会受到怎样的影响?

分析与解 不妨设水面的高度为 0，当点 P 旋转到水面以下时，P 点距水面的高度为负值. 显然，h 与 t 的函数关系是周期函数的关系.

如图 1-58，设水车的半径为 R，$R=1.5$ m；水车中心到水面的距离为 b，$b=1.2$ m；$\angle QOP$ 为 α；水车旋转一圈所需的时间为 T；由已知 $T=\frac{4}{3}(\text{min})=80(\text{s})$，单位时间(单位：s)旋转的角度(单位：rad)为 ω，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{40}$ rad/s.

为了方便，不妨从点 P 位于水车轮与水面交点 Q 时开始计时($t=0$). 在 t 时刻水车转动的角度为 α，如图 1-58 所示，$\angle QOP=\alpha=\omega t=\frac{\pi}{40}t(\text{rad})$.

过 P 点向水面作垂线，交水面于点 M，PM 的长度为 P 点的高度 h. 过水车中心 O 作 PM 的垂线，交 PM 于点 N，$\angle QON$ 为 φ.

从图中不难看出：

$$h=PM=PN+NM=R\sin(\alpha-\varphi)+b. \quad ①$$

这是一个由三角函数确定的数学模型.

从图中可以看出：$\sin\varphi=\frac{1.2}{1.5}$，所以 $\varphi\approx 53.1^\circ\approx 0.295\pi$ rad.

把前面已经确定了的参数 a, φ, R 和 b 代入①式，我们就可以得到

$$h\approx 1.5\sin\left(\frac{\pi}{40}t-0.295\pi\right)+1.2\ (\mathrm{m}). \qquad ②$$

这就是 P 点距水面的高度 h 关于时间 t 的函数解析式.

因为当 P 点旋转到 $53.1°$ 时，P 点到水面的距离恰好是 1.2(m)，此时 $t=\frac{53.1\times 80}{360}\approx 11.8$ (s)，故可列表、描点，画出函数在区间 $[11.8, 91.8]$ 上的简图(如图 1-59)：

表 1-18

t	11.8	31.8	51.8	71.8	91.8
$h\approx 1.5\sin\left(\frac{\pi}{40}t-0.295\pi\right)+1.2$	1.2	2.7	1.2	−0.3	1.2

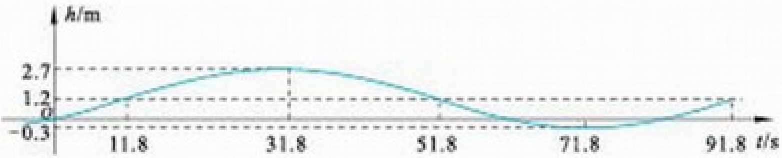


图 1-59

如果雨季河水上涨或旱季河流水量减少，将造成水车中心 O 与水面距离的改变，而使函数解析式中所加参数 b 发生变化. 水面上涨时参数 b 减小；水面回落时参数 b 增大. 如果水车轮转速加快，将使周期 T 减小，转速减慢则使周期 T 增大.

面对实际问题建立数学模型，是一项重要的基本技能. 这个过程并不神秘，就像这个例题，把问题提供的“条件”逐条地“翻译”成“数学语言”，这个过程是很自然的.

练 习

某昆虫种群数量 1 月 1 日低到 700 只，当年 7 月 1 日高达 900 只，其数量在这两个值之间按正弦曲线规律改变.

(1) 求出种群数量关于时间 t 的函数解析式，t 以月为单位；

(2) 画出种群数量关于时间 t 的函数图像.

习 题 1—9

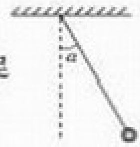
A 组

1. 电流 I 随时间 t 变化的关系式是 $I=A\sin\omega t$，$t\in[0,+\infty)$，设 $\omega=10\pi$ rad/s，$A=5$.

(1) 求电流 I 变化的周期；

(2) 当 $t=0,\dfrac{1}{200},\dfrac{1}{100},\dfrac{3}{200},\dfrac{1}{50}$（单位：s）时，求电流 I.

2. 一个单摆如图所示，小球偏离铅垂线方向的角为 α(rad)，α 作为时间 t 的函数，满足关系 $\alpha(t)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)$. 求：



（第 2 题）

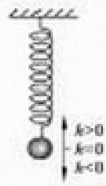
(1) 最初时（$t=0$）α 的值是多少？

(2) 单摆摆动的频率是多少？

(3) 经过多长时间单摆完成 5 次完整摆动？

3. 如图，挂在弹簧下方的小球做上下振动，小球在时间 t(s) 时相对于平衡位置（即静止的位置）的高度为 h（单位：cm），由下列关系式决定：

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ t\in[0,+\infty).$$



（第 3 题）

以横轴表示时间，纵轴表示高度，作出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图，并回答下列问题：

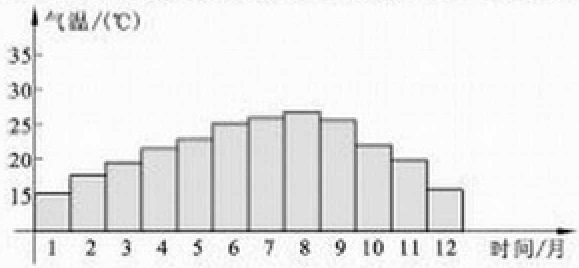
(1) 小球开始振动（$t=0$）时的位置在哪里？

(2) 小球位于最高、最低位置时 h 的值是多少？

(3) 经过多少时间小球振动一次（即周期是多少）？

(4) 小球每 1 s 能往复振动多少次（即频率是多少）？

4. 某地为发展旅游事业，在旅游手册中给出了当地一年 12 个月每个月的月平均气温表，如图（气温单位：℃）. 根据图中提供的数据，试用 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$ 近似地拟合出月平均温度与时间（单位：月）的函数关系，并求出其周期和振幅，以及气温达到最大值和最小值的时间.（答案不唯一）



（第 4 题）

B 组

从一块圆心角为 120°，半径为 20 cm 的扇形钢板上切割一块矩形钢板. 请问怎样设计切割方案，才能使矩形面积最大？

阅读材料

数学与音乐

《梁祝》优美动听的旋律，《十面埋伏》的铮铮琵琶声，贝多芬令人激动的交响曲，田野里昆虫啁啾的鸣叫……当沉浸在这些美妙的音乐声中时，你是否想到了它们其实与数学有着密切的联系？

事实上，数学与音乐之间不仅有着密切的联系，而且相互交融形成了一个和谐统一的整体．古希腊时代的毕达哥拉斯（约公元前580—公元前500）就已经发现了数学与音乐的关系．他注意到如果振动弦的长度可表示成简单的整数之比，这时发出的将是和音，如2∶3（五度和音）或3∶4（四度和音）．

音乐中存在着数学．下面是贝多芬“欢乐颂”的一个片段（图1-60）：

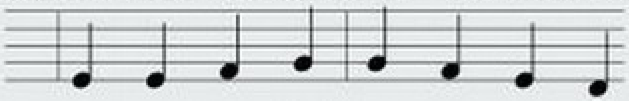


图1-60

如果以时间为横轴，音高为纵轴建立平面直角坐标系，那么写在五线谱中的音符就变成了坐标系中的点（图1-61）：

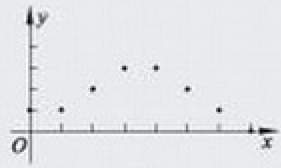


图1-61

实际上，音乐中的五线谱就相当于一个坐标系，写在五线谱中的音符相当于坐标系中的点，两个相邻点横坐标的差就是前一个音符的音长，而一首乐曲就是一个音高 y 关于时间 x 的函数：$y=f(x)$．

忽上忽下跳动的音符也是有一定规律可循的．在一首乐曲中常常会有一段音符反复出现，这就是它的主旋律．它表达了该乐曲的主题．从数学上看，乐曲的主旋律就是通过周期性表达的，可以用三角函数来表示．

下面就是西方乐曲《When the Saints Go Marching In》的主旋律（图1-62）．可以看出，其音高是随时间周期性变化的．

图1-62

反过来，数学中也存在着音乐，我们可以利用函数来创作乐曲．比如，在余弦函数上取出 6 个点（图 1-63），按照四分之四拍写在五线谱中，就得到一段乐曲（图 1-64）：

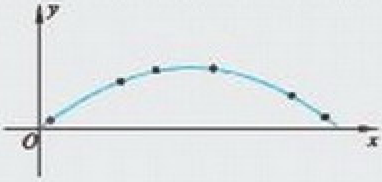


图 1-63

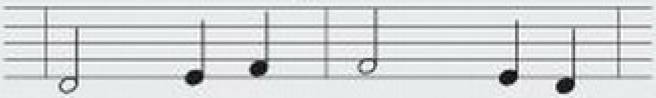


图 1-64

用数学作曲的典型代表就是 20 世纪 20 年代哥伦比亚大学的数学和音乐教授 Joseph Schillinger．他曾经把纽约时报上的一条商务曲线描述在坐标纸上，然后把它分成比例合适的小节，选取适当的点进行处理并演奏出来，结果竟然是一首曲调优美，与巴赫作品相似的乐曲！Joseph Schillinger 甚至认为：根据一套准则，所有的音乐杰作都可以转变为数学公式．他的学生 George Gershwin 更是推陈出新，创建了一套用数学作曲的系统．据说著名歌剧《Porgy and Bess》就是他使用这样的一套系统创作的．

资料来源：

1. T. H. Garland，C. V. Kahn. Math and Music：Harmonious Connections. Dale Seymour Publications，1995

2. 李文林．数学史概论．第二版．北京：高等教育出版社，2002

课题学习

利用现代信息技术探究

$y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (A>0,\omega>0)$的图像

工具：几何画板、图形计算器或其他数学软件.

步骤：

第一步，利用几何画板、图形计算器或其他数学软件画出一组$y=\sin\omega x$的图像，ω 取不同的值(如图 1-65)：

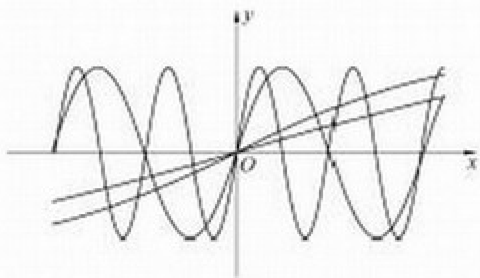


图 1-65

画出更多类似的图像，体会函数 $y=\sin\omega x$ 中的参数ω 对图像的影响及规律.

第二步，利用几何画板、图形计算器或其他数学软件画出一组$y=\sin(x+\varphi)$的图像，φ 取不同的值(如图 1-66)：

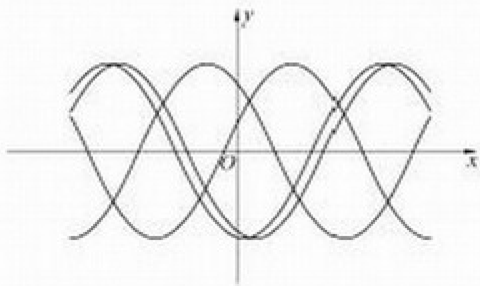


图 1-66

画出更多类似的图像，体会函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 中的参数 φ 对图像的影响及规律.

第三步，用几何画板、图形计算器或其他数学软件画出一组$y=A\sin x$的图像，A 取不同的值(如图 1-67)：

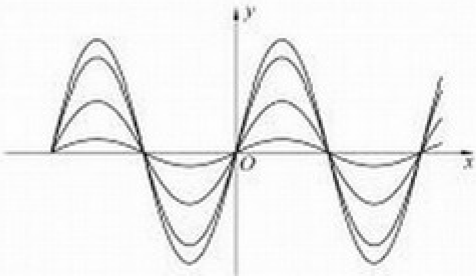
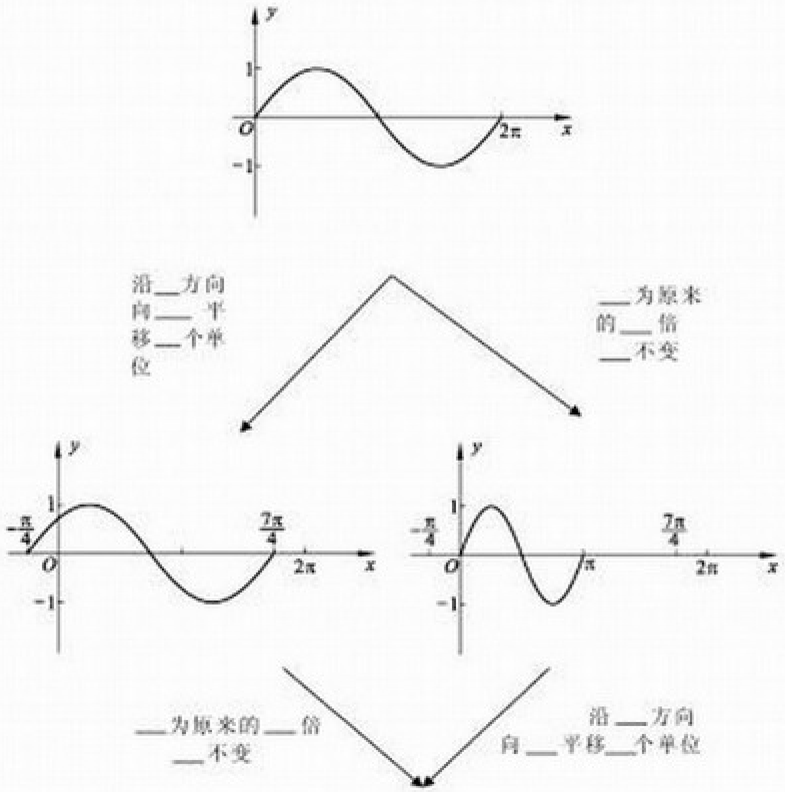


图 1-67

画出更多类似的图像，体会函数 $y=A\sin x$ 中的参数 A 对图像的影响及规律.

第四步，探究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$ 的图像可由函数 $y=\sin x$ 的图像经过怎样的变化得到. 例如 $A=2$，$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，图像可由函数 $y=\sin x$ 的图像经过如图 1-68 所示的变化得到.



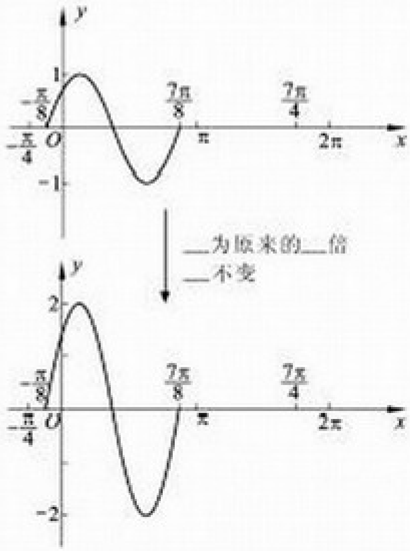


图 1-68

第五步，根据以上研究，请分析解决以下问题：

1. 参数 A,ω,φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像有什么影响？

2. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的图像可由函数 $y=\sin x$ 的图像经过怎样的变化得到？

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化.
2. 理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.
3. 能画出函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的图像. 会利用单位圆或三角函数图像推导出诱导公式，并能借助图像理解正弦函数、余弦函数在$[0,2\pi]$，正切函数在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的性质(如单调性、最大值和最小值、图像与 x 轴交点等).
4. 了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的实际意义；会画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像(有条件的学生，可以借助数学软件或图形计算器)，体会参数 A,ω,φ 对函数图像的影响.

二、复习本章知识，整理笔记，建议就以下问题思考、归纳、概括，写出复习小结报告

1. 本章学习了哪些知识？它们之间存在怎样的逻辑联系？请用框图表示出本章的知识结构，并对结构图作必要的说明.
2. 为什么要建立度量角的弧度制，它对于我们研究三角函数有什么好处？
3. 任意角的三角函数是怎样定义的？为什么称之为函数？与必修 1 中函数的知识相比较，本章学习了三角函数的哪些重要性质？
4. 函数 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$($A,\omega,\varphi,b$ 为常数)有何关系？A,ω,φ 对函数图像有什么影响？它们的物理意义是什么？
5. 请查阅资料，看一看除正弦函数、余弦函数、正切函数之外，还有哪些三角函数. 它们之间存在什么样的关系？与同学交流这些三角函数的图像与性质.
6. “三角函数是刻画周期现象的一类重要的初等函数”，你对这句话有什么体会？请找一个生活中的实际例子给予说明.

7. 本章出现的公式比较多，你有什么办法帮助记忆并减轻记忆负担？
8. 举例说明学习本章知识要注意哪些问题，解题时经常会出现哪些错误，原因是什么，怎样避免？

[redacted]

A　组

1. 时钟的分针长 5 cm，从 2:10 到 2:35，分针转过的角的弧度是多少？分针扫过的扇形面积是多少？分针尖端所走过的弧长是多少？（π 取 3.14，计算结果保留两位有效数字）

2. 确定下列各式的符号：

(1) $\cos 2-\sin 2$；　　(2) $\sin 3\cos 4\tan 5$.

3. 已知 $\cos\varphi=\frac{1}{4}$，求 $\sin\varphi$，$\tan\varphi$.

4. 已知角 α 的终边在函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图像上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

5. 计算：

(1) $\sin\frac{25}{6}\pi+\cos\frac{25}{3}\pi+\tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right)$；　　(2) $\sin 2+\cos 3+\tan 4$；(可以用计算器)

(3) $\sin\left(-\frac{14}{3}\pi\right)+\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)+\tan\left(-\frac{53}{6}\pi\right)$；　　(4) $\tan 675^\circ-\sin(-330^\circ)-\cos 960^\circ$.

6. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，计算：

(1) $\cos(2\pi-\alpha)$；　　(2) $\tan(\alpha-7\pi)$.

7. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-\tan x}$；　　(2) $y=\frac{1}{1+2\sin x}$；

(3) $y=-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$；　　(4) $y=\sqrt{1-\cos\frac{x}{2}}$.

8. 下列各式能否成立？说明理由.

(1) $\sin^2 x=1.3$；　　(2) $\cos x\sin x=-\frac{3}{2}$；

(3) $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$；　　(4) $1-\cos^3 x=\log_2\frac{1}{10}$.

9. 求下列函数的最大值、最小值以及对应的 x 值的集合：

(1) $y=\sqrt{2}+\frac{\sin x}{\pi}$；　　(2) $y=\frac{3}{2}-2\cos x$；

(3) $y=3\sin\left(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

10. 已知 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，分别求适合下列各条件的 x 的集合：

(1) $\cos x-\sin x<0$；　　(2) $\tan x<\sin x$.

11. 在区间 $[0,2\pi]$ 中，求出：

(1) 使 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是减少的区间；

(2) 使 $y=\sin x$ 是增加的而 $y=\cos x$ 是减少的区间.

12. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$；　(2) $y=\frac{1}{5}\sin\left(3x-\frac{4\pi}{3}\right)$.

13. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2+\cos x$；　(2) $y=\left|\frac{1}{2}\sin x\right|$；

(3) $y=x^2\sin x$；　(4) $y=\cos x-\tan x$.

14. 不作图，写出下列函数的振幅、周期、初相，并说明怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到它们的图像：

(1) $y=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$；　(2) $y=2\sin\left(\frac{x}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$.

15. 比较下列各组函数值的大小：

(1) $\sin\frac{32\pi}{5}$ 和 $\sin\frac{27\pi}{4}$；　(2) $\cos(-2\ 037^\circ)$ 和 $\cos 852^\circ$；

(3) $\tan\left(-\frac{18\pi}{7}\right)$ 和 $\tan\left(-\frac{43\pi}{8}\right)$.

B　组

1. 已知 α 终边在第四象限，确定下列各角终边所在的象限：

(1) $\frac{\alpha}{2}$；　(2) 2α；　(3) $\frac{\alpha}{3}$；　(4) 3α.

2. 一个扇形的弧长和面积的数值都是5，求这个扇形中心角的度数.

3. 求下列函数的值域：

(1) $y=2-3\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(2) $y=\frac{3\sin x+1}{\sin x-2}$；

(3) $y=7-7\sin x-3\cos^2 x$.

4. 利用单位圆和三角函数线，分别求出使下列各组条件成立的 x 的集合：

(1) $\begin{cases}\cos x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$；　(2) $\tan x\geqslant-\sqrt{3}$.

5. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0,\omega>0,|\varphi|\leqslant\pi)$ 在一个周期内，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，y 取最小值 1；当 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，y 取最大值 3. 请求出此函数的解析式.

6. 回顾本章的学习，你对引入弧度制的必要性和引入弧度制后带来的好处有什么认识，请通过实例谈谈你的体会.

第二章 平面向量

在现实世界中，我们遇到的量有两类. 一类如长度、面积、质量等，它们只有大小的区别；另一类既有大小、又有方向，例如位移、速度、力等. 这类既有大小、又有方向的量就是我们所要研究的向量.

向量是数学中的重要内容之一. 本章我们将学习向量的概念、运算、坐标表示，以及在数学、物理和日常生活中的简单应用.

§1　从位移、速度、力到向量

1.1　位移、速度和力

实例分析

在物理学中，我们学习过“位移”“速度”和“力”等物理量.

民航每天都有从北京飞往上海、广州、重庆、哈尔滨等地的航班. 每次飞行都是民航客机的一次位移. 由于飞行的距离和方向各不相同，因此，它们是不同的位移(如图 2-1).

图 2-1

假如学校位于你家东偏北 30°方向，距离你家 2 000 m. 从家到学校，可能有长短不同的几条路. 无论走哪条路，你的位移都是向东偏北 30°方向移动了 2 000 m(如图 2-2).

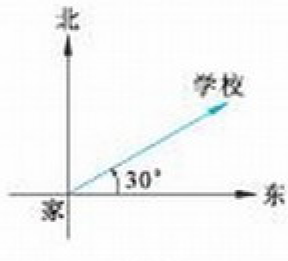
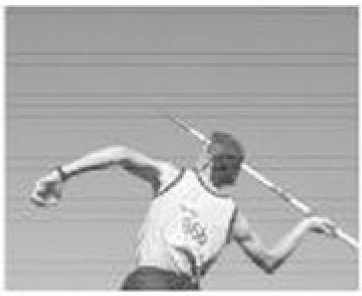


图 2-2

飞机向东北方向飞行了 150 km，飞行时间为半小时，飞行速度的大小是 300 km/h，方向是东北.



某著名运动员投掷标枪时，标枪的初速度的记录资料是：平均出手角度 $\theta=43.242°$，平均出手速度大小为 $v=28.35$ m/s.

起重机吊装物体时，物体既受到竖直向下的重力作用，同时又受到竖直向上的起重机拉力的作用. 当拉力的大小超过重力的大小时，物体即被吊起.

汽车爬倾斜角为 θ 的坡路时，汽车的牵引力大小为 F(N)，方向倾斜向上，与水平方向成 θ 角.

我们不难发现，位移、速度和力这些物理量都是既有大小，又有方向的量，在物理中称为“矢量”. 它们和长度、面积、质量等只有大小

的量是不同的.

1.2 向量的概念

在现实世界中，像位移、速度、力等既有大小，又有方向的量是很多的，如加速度、动量等. 在数学中，我们把这种既有大小，又有方向的量统称为**向量**.

在数学中，怎样表示向量呢？

我们知道，在物理学中，表示位移最简单的方法，是用一条带箭头的线段，箭头的方向表示位移的方向，线段的长度表示位移的大小. 速度和力也是用这种方法表示的，箭头的方向分别表示速度和力的方向，线段长度分别表示速度和力的大小.

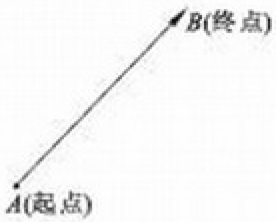


图 2-3

这种带箭头的线段，在数学中叫作“有向线段”. 一般地，若规定线段 AB 的端点 A 为起点，端点 B 为终点，则线段 AB 就具有了从起点 A 到终点 B 的方向和长度. 这种具有方向和长度的线段叫作**有向线段**(如图 2-3)，记作$\overrightarrow{AB}$. 线段 AB 的长度也叫作有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

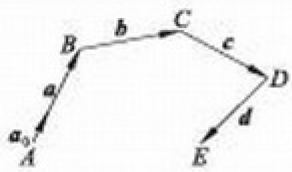


图 2-4

向量可以用有向线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向表示向量的方向. 向量也可以用黑体小写字母如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…来表示，书写用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…来表示.

如图 2-4，$|\overrightarrow{AB}|$(或$|\boldsymbol{a}|$)表示向量$\overrightarrow{AB}$(或 $\boldsymbol{a}$)的大小，即**长度**(也称**模**). 长度为零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向，且长度为单位 1 的向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 方向上的**单位向量**，记作 $\boldsymbol{a}_0$.

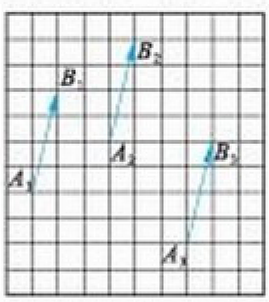


图 2-5

应该注意：数学中的向量与物理中的矢量是有区别的. 在数学中我们研究的是仅由大小和方向确定，而与起点位置无关的向量(亦称为自由向量).

我们规定，长度相等且方向相同的向量，叫作**相等向量**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，因此，当用有向线段表示向量时，起点可以任意选取. 同向且等长的有向线段都表示同一向量，或者说向量可以在平面内平行移动，这样可以为研究问题带来很大方便. 如图 2-5 容易看出

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3}.$$

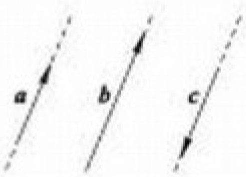


图 2-6

如果表示两个向量的有向线段所在的直线平行或重合，则称这两个向量**平行**或**共线**(如图 2-6). $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 我们规定**零向量与任一向量平行**.

例　如图 2-7，D,E,F 依次是等边三角形 ABC 的边 AB,BC，AC 的中点. 在以 A,B,C,D,E,F 为起点或终点的向量中，

(1) 找出与向量$\overrightarrow{DE}$相等的向量；

(2) 找出与向量$\overrightarrow{DF}$共线的向量.

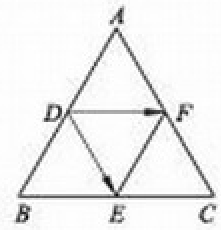


图 2-7

解　由三角形中位线定理不难得到：

(1) 在以 A,B,C,D,E,F 为起点或终点的向量中，与向量$\overrightarrow{DE}$相等的向量有：$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{FC}$；

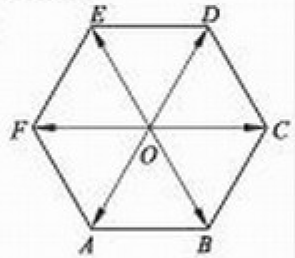
(2) 在以 A,B,C,D,E,F 为起点或终点的向量中，与向量$\overrightarrow{DF}$共线的向量有：$\overrightarrow{BE},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{FD}$.

练习

1. 表示小船的下列位移(用 1∶500 000 的比例尺)：
   (1) 由 A 地向东北方向航行 15 km 到达 B 地；
   (2) 由 A 地向西偏北 $60°$方向航行 20 km 到达 C 地；
   (3) 由 C 地向正南方向航行 25 km 到达 D 地.
2. 用有向线段表示两个相等的向量，这两个有向线段一定重合吗？
3. 在直角坐标系 xOy 中，有三点 $A(1,0)$，$B(-1,2)$，$C(-2,2)$. 请用有向线段分别表示 A 到 B，B 到 C，C 到 A 的位移.

习题 2—1

1. 选择适当的比例尺，用有向线段表示下列向量：
   (1) 终点 A 在起点 O 正东方向 3 m 处；　(2) 终点 B 在起点 O 正西方向 3 m 处；
   (3) 终点 C 在起点 O 东北方向 4 m 处；　(4) 终点 D 在起点 O 西南方向 2 m 处.
2. 用有向线段表示下列物体运动的速度：
   (1) 向正东方向匀速行驶的汽车在 2 h 内的位移是 60 km(用1∶1 000 000的比例尺)；
   (2) 做自由落体运动的物体在 1 s 末的速度(用 1 cm 的长度表示速度为 2 m/s).
3. 用有向线段分别表示一个方向向上，大小为 20 N 的力和一个方向向下，大小为 30 N 的力(用 1 cm 的长度表示力的大小为 10 N).
4. 如图，设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在以正六边形的顶点和中心为始点和终点的向量中，
   (1) 分别写出与图中向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$相等的向量；
   (2) 分别写出与图中向量$\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}$共线的向量.



(第 4 题)

§2　从位移的合成到向量的加法

实例分析

图 2-8

飞机从广州飞往上海，再从上海飞往北京（如图 2-8），这两次位移的结果与飞机从广州直接飞往北京的位移是相同的. 这时，我们就把后面这样一次位移叫作前面两次位移的合位移.

在大型生产车间里，一重物被天车从 A 处搬运到 B 处，参看图 2-9. 它的实际位移$\overrightarrow{AB}$，可以看作水平运动的分位移$\overrightarrow{AC}$与竖直运动的分位移$\overrightarrow{AD}$的合位移.

由分位移求合位移，称为位移的合成. 由物理学知识我们知道，位移合成遵循平行四边形法则，即 AB 是以 AC，AD 为邻边的 $\square ACBD$ 的对角线.

由此我们给出向量加法的定义.

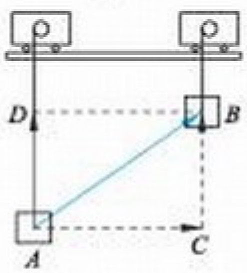


图 2-9

2.1　向量的加法

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如图 2-10，在平面内任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，再作向量$\overrightarrow{AC}$，则向量$\overrightarrow{AC}$叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

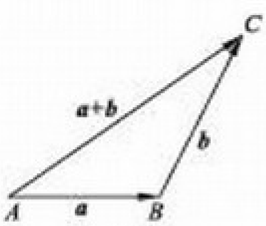


图 2-10

同样，如图 2-11，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，再作平行$\overrightarrow{AD}$的$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 DC. 因为$AD /\!/ BC$，且 $AD=BC$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形，向量$\overrightarrow{AC}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，表示为：$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

以上两种求两个向量和的作图方法，分别叫作向量求和的**三角形法则**和**平行四边形法则**.

图 2-12 表示两个共线向量求和的情形.

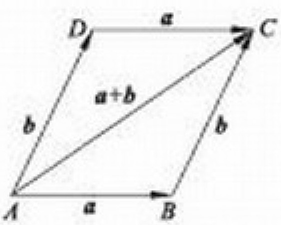


图 2-11

图 2-12

例 1　轮船从 A 港沿东偏北 30° 方向行驶了 40 n mile(海里)[1]到达 B 处，再由 B 处沿正北方向行驶 40 n mile 到达 C 处. 求此时轮船与 A 港的相对位置.

[1] 1 n mile=1 852 m.

解　如图 2-13，设$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$分别表示轮船的两次位移，则$\overrightarrow{AC}$表示轮船的合位移，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

在 Rt$\triangle ADB$ 中，$\angle ADB=90^{\circ}$，$\angle DAB=30^{\circ}$，$|\overrightarrow{AB}|=40$ n mile，

所以　$|\overrightarrow{DB}|=20$ n mile，$|\overrightarrow{AD}|=20\sqrt{3}$ n mile.

在 Rt$\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=90^{\circ}$，$|\overrightarrow{DC}|=60$ n mile，所以

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|&=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2}\\&=\sqrt{(20\sqrt{3})^2+60^2}\\&=40\sqrt{3}\ (\text{n mile}).\end{aligned}$$

因为　$|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AD}|$，

所以　$\angle CAD=60^{\circ}$.

答　轮船此时位于 A 港东偏北 60°，且距 A 港 $40\sqrt{3}$ n mile 的 C 处.

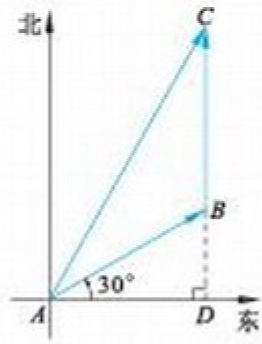


图 2-13

思考交流

请结合图 2-14 和图 2-15，思考向量的加法满足什么运算律.

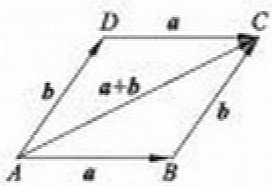


图 2-14

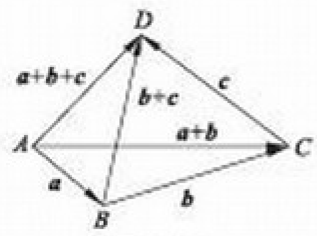


图 2-15

注　意

向量求和的三角形法则，可推广至多个向量求和的多边形法则：n 个向量经过平移，顺次使前一个向量的终点与后一个向量的起点重合，组成一向量折线，这 n 个向量的和等于折线起点到终点的向量，即

$$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}.$$

向量的加法满足交换律与结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}; \tag{2.1}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{2.2}$$

由向量求和的平行四边形法则(图 2-14)和三角形法则(图 2-15)，同学们不难证明上述两公式成立.

例 2　两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 同时作用在一个物体上，其中 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为 40 N，方向向东，$\boldsymbol{F}_2$ 的大小为 30 N，方向向北，求它们的合力.

解　如图 2-16，$\overrightarrow{OA}$表示 $\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{OB}$表示 $\boldsymbol{F}_2$. 以 OA，OB 为邻边作

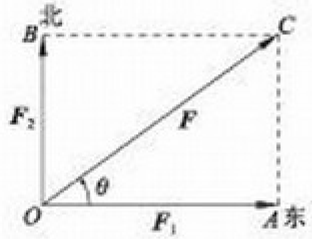


图 2-16

$\square OACB$，则$\overrightarrow{OC}$表示合力 $\boldsymbol{F}$.

在 Rt△OAC 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\boldsymbol{F}_1|=40$ N，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OB}|=|\boldsymbol{F}_2|=30$ N. 由勾股定理，得

$$|\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2}=\sqrt{40^2+30^2}=50\ (\text{N}).$$

设合力 $\boldsymbol{F}$ 与力 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 θ，则

$$\tan\theta=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{|\boldsymbol{F}_1|}=\frac{3}{4}=0.75.$$

所以 $\theta\approx37°$.

答 合力大小为 50 N，方向为东偏北 37°.

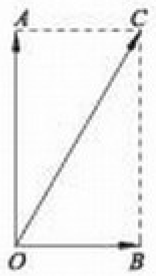


图 2-17

例 3 在小船过河时，小船沿垂直河岸方向行驶的速度为 $v_1=3.46$ km/h，河水流动的速度 $v_2=2.0$ km/h，试求小船过河实际航行速度的大小和方向.

解 如图 2-17，设$\overrightarrow{OA}$表示小船垂直于河岸行驶的速度，$\overrightarrow{OB}$表示水流的速度，以 OA，OB 为邻边作$\square OACB$，则$\overrightarrow{OC}$就是小船实际航行的速度.

在 Rt△OBC 中，$|\overrightarrow{BC}|=v_1=3.46$ km/h，$|\overrightarrow{OB}|=v_2=2.0$ km/h，

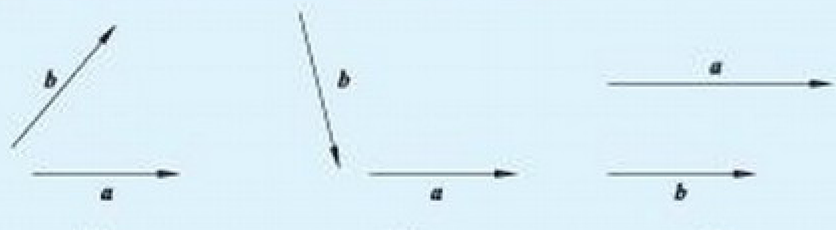
所以 $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}=\sqrt{3.46^2+2.0^2}\approx4.0$ (km/h).

因为 $\tan\angle BOC=\frac{v_1}{v_2}=1.73$，所以 $\angle BOC\approx60°$.

答 小船实际航行速度的大小约为 4.0 km/h，方向与水流方向约成 60°角.

练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，用向量加法的三角形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



(第 1 题)

2. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，用向量加法的平行四边形法则作出向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

（第2题）

3. 小船向正东方向行驶了 10 km，又向正北方向行驶了17.3 km. 求小船两次位移的合位移.

4. 填空：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$________；　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=$________；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$________.

2.2　向量的减法

前面我们看到，向量的加法与实数的加法类似. 于是，我们类比实数运算来定义向量的减法运算.

我们把与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**. 记作 $-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量. 并且规定，**零向量的相反向量仍是零向量**. 于是

$$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

由向量加法的定义可知，互为相反向量的两个向量的和为零向量，即

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

所以，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是互为相反的向量，那么

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

求两个向量差的运算，叫作**向量的减法**.

如何求两个向量的差?

如图 2-18 所示，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为边作▱$OACB$，连接 BA. 观察图形，不难看出，向量$\overrightarrow{BA}$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$的和，也就是向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

事实上，如果把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在 O 点，那么从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 指向被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A，得到的向量$\overrightarrow{BA}$就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

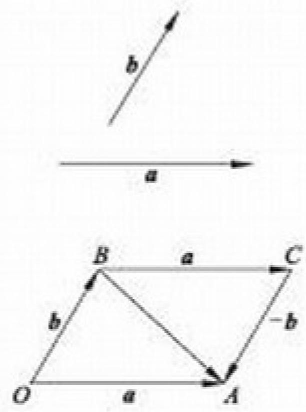
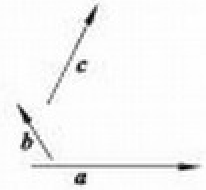
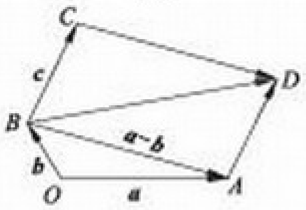


图 2-18

例 4　如图 2-19(a)，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.



(a)



(b)

图 2-19

解 在平面上任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 再作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，并以 BA，BC 为邻边作▱$BADC$，则

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(如图 2-19(b)).

例 5 已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解 如图 2-20，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为邻边作▱$ABCD$，则

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

因为 $$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,$$

所以 $$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|.$$

又 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以四边形 $ABCD$ 为矩形. 故

$$AD\perp AB.$$

在 Rt△DAB 中，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=8$，由勾股定理，得

$$|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2}$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

所以 $$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=10.$$

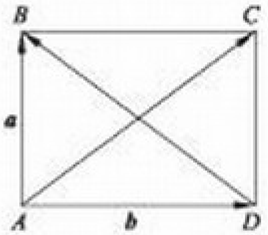
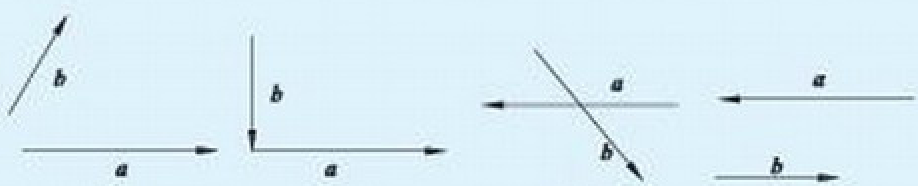


图 2-20

练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



(1) (2) (3) (4)

(第 1 题)

2. 填空.

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$________；

(2) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$________；

(3) $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=$________；

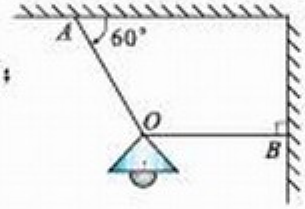
(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=$________.

习 题 2—2

A 组

1. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$分别表示下列位移："向北 10 km""向南5 km""向西 10 km""向东 5 km"．请说明向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}$的意义.

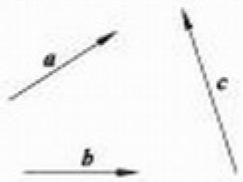
2. 已知图中电线AO与天花板的夹角为$60°$，电线AO所受拉力$F_1=24$ N；绳BO与墙壁垂直，所受拉力$F_2=12$ N. 求$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的合力.



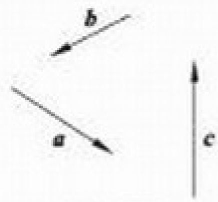
(第 2 题)

3. 如图，已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$不共线，求作向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

4. 如图，已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$不共线，求作向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



(第 3 题)



(第 4 题)

5. 化简：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}$；

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

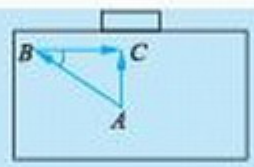
6. 若$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$，那么$A$，$B$，$C$三点是否一定是一个三角形的三个顶点？

B 组

1. 如图，在一场足球比赛中，中场队员在A点位置得球，将球传给位于B点的左边锋，随即快速直向插上. 边锋得球后看到对方后卫上前逼抢，于是将球快速横传至门前. 球到达C点时前插的中场队员正好赶到，直接射门得分. 若$BC=20$ m，$\angle ABC=37°$，

(1) 求：中场队员从传球至射门这一过程中足球的位移；

(2) 这一过程中中场队员的位移与球的位移是否相等？

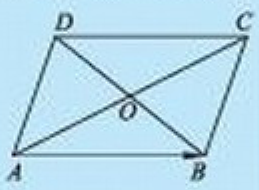


(第 1 题)

2. 雨滴在下落一定时间后的运动是匀速的，无风时雨滴下落的速度是4.0 m/s. 现在有风，风使雨滴以3.0 m/s的速度水平向东移动，那么雨滴将以多大的速度着地？这个速度的方向怎样？

3. 小汽艇在静水中的速度是12 km/h，河水的流速是6 km/h. 如果汽艇向着垂直河岸的方向行驶，小汽艇在河水中的实际运动速度是多大？方向怎样？要使小汽艇沿垂直河岸方向到达对岸码头，船头方向又应怎样？

4. 如图，在$\square ABCD$中，向量$\overrightarrow{AB}$是哪两个向量的和，哪两个向量的差？



(第 4 题)

§3 从速度的倍数到数乘向量

3.1 数乘向量

实例分析

在急风骤雨、雷电交加的夜晚，为什么我们总是先看到闪电，后听到雷声？这是因为在同一方向上光速远远大于声速. 经测量，光速大小约为声速的 8.7×10^5 倍.

一重物由高空自由落下，由自由落体运动的速度公式 $v_t=gt$ 可知，它在 1 s 末和 2 s 末的速度，大小分别为 $v_1=9.8$ m/s 和 $v_2=19.6$ m/s. 显然 $v_2=2v_1$，并且方向都是竖直向下.

以上实例分析说明在实际中存在这样的两个向量，它们是共线的，而且大小之间存在倍数关系. 因此，有必要定义实数与向量积的运算.

我们知道，对于向量 $3\boldsymbol{a}$，我们可以理解为 3 个 $\boldsymbol{a}$ 相加，即 $3\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$. 由向量加法的意义可知，$3\boldsymbol{a}$ 仍是一个向量，它的长度为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 3 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；向量 $-3\boldsymbol{a}$ 是 $3\boldsymbol{a}$ 的相反向量，它的长度与 $3\boldsymbol{a}$ 相同，也是 $|\boldsymbol{a}|$ 的 3 倍，它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的长度为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 它的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，方向任意.

由实数与向量积的定义可以看出，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的几何意义就是将表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段伸长或压缩. 当 $|\lambda|>1$ 时，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段在原方向（$\lambda>0$）或反方向（$\lambda<0$）上伸长为原来的 $|\lambda|$ 倍；当 $|\lambda|<1$ 时，

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段在原方向($\lambda>0$)或反方向($\lambda<0$)上缩短为原来的 $|\lambda|$ 倍.

设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为向量, $\lambda\neq0$ 为实数,根据图 2-21,易验证实数与向量的积满足运算律:

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

事实上,设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为向量, λ, μ 为实数,如下的运算律成立:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};\qquad(2.3)$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\qquad(2.4)$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\qquad(2.5)$$

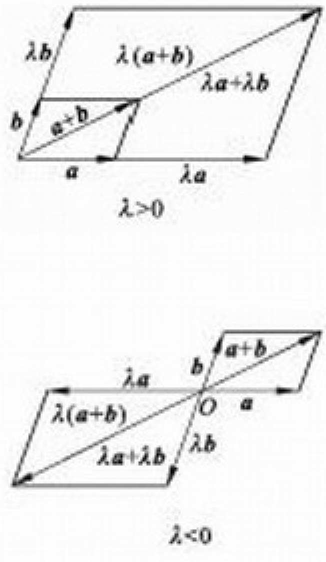


图 2-21

向量的加法、减法和实数与向量积的综合运算,通常叫作向量的线性运算(或线性组合). 若一个向量 $\boldsymbol{c}$ 是由另一些向量的线性运算得到的,我们说这个向量 $\boldsymbol{c}$ 可以用另一些向量线性表示. 例如 $2\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{a}$, $-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$ 可以用 $\boldsymbol{a}$ 线性表示; $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, $-3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ 等都可以由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性表示.

例 1　设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为向量,计算下列各式:

(1) $-\frac{1}{3}\times3\boldsymbol{a}$;

(2) $2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$;

(3) $(2m-n)\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}-(m-n)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, ($m$, n 为实数).

解　(1) 原式 $=\left(-\frac{1}{3}\times3\right)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(2) 原式 $=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a})-\left(2\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}$;

(3) 原式 $=2m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}-m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+n(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=2m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$

$=m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$.

对于向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{b}$,如果有一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,那么由实数与向量的积的定义知, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

反之,已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,且向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度是向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 λ 倍,即 $|\boldsymbol{b}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$. 那么当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时,有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反方向时,有 $\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}$.

由此,我们得到了向量共线的判定定理和性质定理.

定理　$\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,若存在一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线.

定理 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，则存在一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

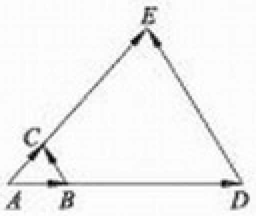


图 2-22

例 2 如图 2-22，已知 $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DE}=4\overrightarrow{BC}$，试判断 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 是否共线.

解 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=4\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}\\&=4(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=4\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

所以，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线.

> **说 明**
>
> 例 3 给出了判断三个点 A,B,C 共线的一个方法.

例 3 如图 2-23，A,B,C 是平面内三个点，且 A 与 B 不重合，P 是平面内任意一点，若点 C 在直线 AB 上，则存在实数 λ，使得

$$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}.$$

证明 如图 2-23，因为向量 $\overrightarrow{BC}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 共线，根据向量共线定理可知

$$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}.$$

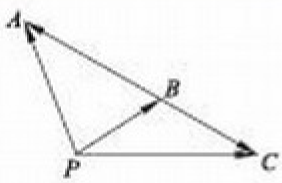


图 2-23

即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}&=\lambda(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}),\\\overrightarrow{PC}&=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-\lambda\overrightarrow{PB},\\\overrightarrow{PC}&=\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}.\end{aligned}$$

练 习

1. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 表示小船沿东北方向行驶了 2 km，则向量 $3\boldsymbol{a}$ 和 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 的意义是什么？
2. 任作一向量 $\overline{OA}$，再作向量 $\overline{OB}=2\overline{OA}$，$\overline{OC}=-\frac{1}{3}\overline{OA}$.
3. 计算下列各式：

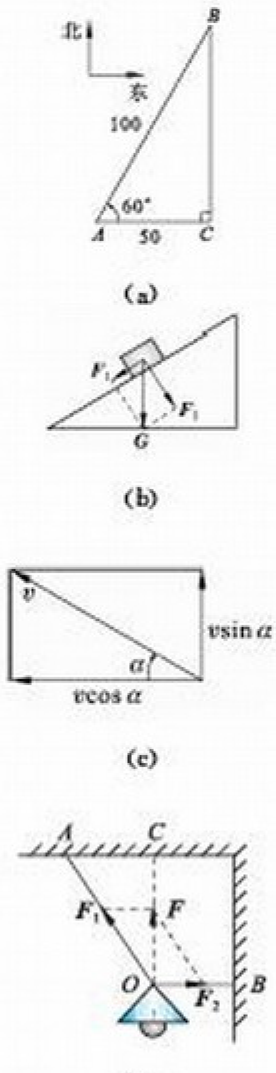
   (1) $(-2)\times\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$；　　(2) $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.
4. 判断下列各小题中的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是否共线：

   (1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{e}$；

   (2) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$；

   (3) $\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{c}$.
5. 已知向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，求作向量 $2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

3.2　平面向量基本定理



(a)　(b)　(c)　(d)

图 2-24

B 港在 A 港东偏北 60° 的 100 n mile 处，轮船从 A 港出发沿东偏北 60°方向航行 100 n mile 可到达 B 港. 如果向东航行 50 n mile，再向北航行 $50\sqrt{3}$ n mile，也可到达 B 港.（如图 2-24(a)）

在物理学中我们知道，一个放在斜面上的物体所受的竖直向下的重力 $\boldsymbol{G}$，可分解为使物体沿斜面下滑的力 $\boldsymbol{F}_1$，和使物体垂直于斜面并压紧斜面的力 $\boldsymbol{F}_2$.（如图 2-24(b)）

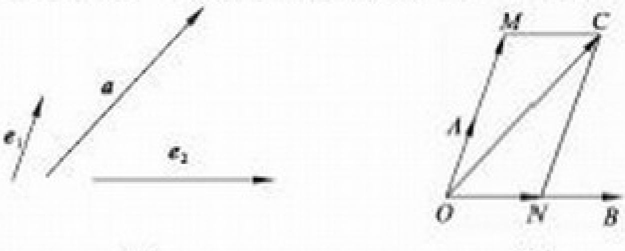
飞机沿仰角为 α 的方向起飞的速度 v，可分解为沿水平方向的速度 $v\cos\alpha$ 和沿竖直方向的速度 $v\sin\alpha$.（如图 2-24(c)）

如图 2-24(d)，一盏电灯，可以由电线 CO 吊在天花板上，也可以由电线 AO 和绳 BO 拉住. CO 所受的拉力 $\boldsymbol{F}$ 应与电灯重力平衡，拉力 $\boldsymbol{F}$ 可以分解为 AO 与 BO 所受的拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$.

从上面的实例中可以看出，把一个向量分解到两个不同的方向，特别是作正交分解，即在两个互相垂直的方向上进行分解，是解决问题的一种十分重要的手段.

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，$\boldsymbol{a}$ 是这一平面内的任一向量，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 之间有什么关系呢？

如图 2-25，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$. 过点 C 分别作平行于 OB，OA 的直线，交直线 OA 于点 M，交直线 OB 于点 N，则有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.



(a)　(b)

图 2-25

因为 $$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},$$
所以 $$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

于是得到下面的定理：

平面向量基本定理　如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一一对实数 λ_1,λ_2，使
$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2.$$

我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组**基底**.

例 4 如图 2-26，质量为 10 kg 的物体 A 沿倾角 $\theta=30°$ 的斜面匀速下滑，求物体受到的滑动摩擦力和支持力.（$g=10\ \text{m/s}^2$）

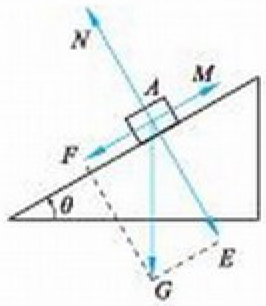


图 2-26

解 物体受到三个力：重力 $\overrightarrow{AG}$，斜面支持力 $\overrightarrow{AN}$，滑动摩擦力 $\overrightarrow{AM}$. 把重力 $\overrightarrow{AG}$ 分解为平行于斜面的分力 $\overrightarrow{AF}$ 和垂直于斜面的分力 $\overrightarrow{AE}$. 因为物体做匀速运动，所以 $\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AF}$.

因为 $|\overrightarrow{AG}|=10\ (\text{kg})\times 10\ (\text{m/s}^2)=100\ (\text{N})$，

$$|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AG}|\cdot\sin 30°=100\times\frac{1}{2}=50\ (\text{N}),$$

$$|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AG}|\cdot\cos 30°=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}\ (\text{N}),$$

所以 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{AF}|=50\ \text{N}$，

$|\overrightarrow{AN}|=|\overrightarrow{AE}|=50\sqrt{3}\ \text{N}$.

答 物体所受滑动摩擦力大小为 50 N，方向与斜面平行向上；所受斜面支持力大小为 $50\sqrt{3}$ N，方向与斜面垂直向上.

例 5 如图 2-27，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，DC 的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BF}$ 和 $\overrightarrow{DE}$.

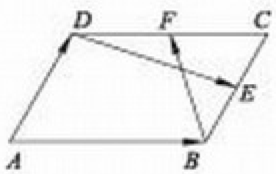


图 2-27

解 因为在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，DC 的中点，且

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},$$

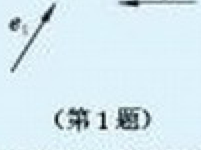
所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CF}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

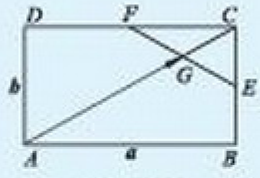
同理可得 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

练 习

1. 如图，已知向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，求作向量 $2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知 E，F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 BC，CD 的中点，EF 与 AC 交于点 G，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.

习 题 2—3

A　组

1. 化简下列各式：

(1) $3(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-2(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$；　　(2) $\frac{1}{3}(4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$；

(3) $2(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$.

2. 判断下列向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是否共线（其中向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线）.

(1) $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{e}_1$；　　(2) $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=20\boldsymbol{e}_1+15\boldsymbol{e}_2$；

(3) $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2$；　　(4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

3. 一架飞机沿仰角 30°的方向以 80 m/s 的速度起飞. 飞机起飞时沿水平方向和竖直方向的速度分别是多少？

4. 根据下列条件，分别判断四边形 $ABCD$ 的形状.

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$；

(3) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$；　　(4) $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$.

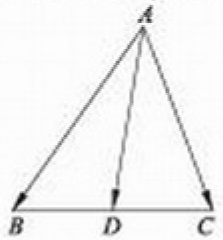
5. 如图，D 是$\triangle ABC$ 中 BC 边的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AD}$；

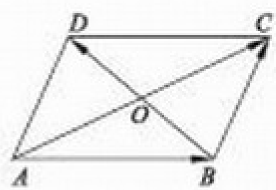
(2)若点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，能否用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AG}$；

(3)若点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，那么$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=$？

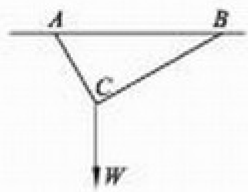
6. 如图，在▱$ABCD$ 中，设对角线$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$.



（第 5 题）



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，用两根绳子把质量为 10 kg 的物体 W 吊在水平横杆 AB 上，$\angle ACW=150°$，$\angle BCW=120°$. 求物体平衡时，A 和 B 处所受力的大小.（绳子的质量忽略不计，$g=10\ \text{m/s}^2$）

B　组

1. 平抛物体运动的初速度是 20 m/s，当物体经过的水平距离是 40 m 时，它的高度下落了多少？物体运动的速度大小是多少？（$g=10\ \text{m/s}^2$）
2. 用向量方法证明：三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半.
3. 试利用图形解释平面向量基本定理，这个定理的作用是什么？谈谈你的体会.

§4 平面向量的坐标

4.1 平面向量的坐标表示

向量的正交分解十分重要，它有广泛的应用.

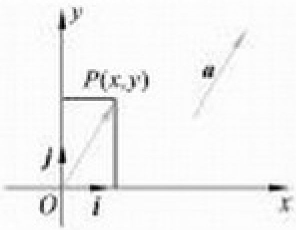


图 2-28

在平面直角坐标系中，如图 2-28，我们分别取与 x 轴，y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 作为基底，$\boldsymbol{a}$ 为坐标平面内的任意向量，以坐标原点 O 为起点作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$. 由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数 x，y，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

因此 $$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

我们把实数对 (x,y) 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**，记作

$$\boldsymbol{a}=(x,y). \quad ①$$

①式是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.

显然，其中 (x,y) 就是点 P 的坐标.

由此可见，在全体有序实数对与坐标平面内的所有向量之间可以建立一一对应关系. 因此在直角坐标系中，点或向量都可以看作有序实数对的直观形象.

在直角坐标系中，向量 $\overrightarrow{OP}$ 具有特殊的意义. 在解决很多问题时，常常需要把自由向量移到原点，我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 作为与它相等的所有向量的一个代表.

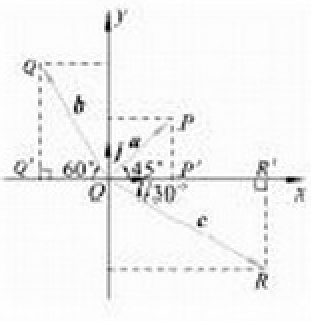


图 2-29

例 1 在平面内以点 O 的正东方向为 x 轴正向，正北方向为 y 轴的正向建立直角坐标系. 质点在平面内做直线运动. 分别求下列位移向量的坐标（如图 2-29）：

（1）向量 $\boldsymbol{a}$ 表示沿东北方向移动了 2 个长度单位；

（2）向量 $\boldsymbol{b}$ 表示沿西偏北 $60°$ 方向移动了 3 个长度单位；

（3）向量 $\boldsymbol{c}$ 表示沿东偏南 $30°$ 方向移动了 4 个长度单位.

解 设 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{c}$，并设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$R(x_3,y_3)$.

（1）如图 2-29 可知，

$$\angle POP'=45^\circ,\ |\overrightarrow{OP}|=2,$$

所以
$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}.$$

所以
$$\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

(2) 因为$\angle QOQ'=60^\circ$，$|\overrightarrow{OQ}|=3$，所以
$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{Q'Q}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{j}.$$

所以
$$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

(3) 因为$\angle ROR'=30^\circ$，$|\overrightarrow{OR}|=4$，

所以
$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OR'}+\overrightarrow{R'R}=2\sqrt{3}\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}.$$

所以
$$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2).$$

4.2　平面向量线性运算的坐标表示

已知$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}.$$

即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2).\qquad(2.6)$$

同理可得
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2).\qquad(2.7)$$

这就是说，**向量和与差的坐标分别等于各向量相应坐标的和与差.**

设$\lambda\in\mathbf{R}$，则
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}.$$

即
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1).\qquad(2.8)$$

这就是说，**实数与向量积的坐标分别等于实数与向量的相应坐标的乘积.**

如图 2-30，给定点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1).\qquad(2.9)$$

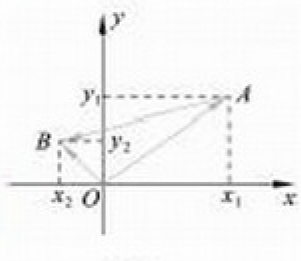


图 2-30

这就是说，**一个向量的坐标等于其终点的相应坐标减去始点的相应坐标.**

例 2 已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,4)$. 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的坐标.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)+(-1,4)=(2,8)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,4)-(-1,4)=(4,0)$，

$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=2(3,4)-3(-1,4)=(6,8)-(-3,12)=(9,-4)$.

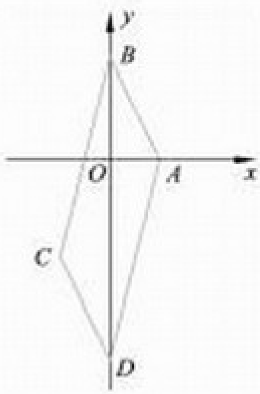


图 2-31

例 3 已知点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(-1,-2)$，求$\square ABCD$ 的顶点 D 的坐标(如图 2-31).

解 设点 D 的坐标为 (x,y). 由图 2-31 所示，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，得

$(0,2)-(1,0)=(-1,-2)-(x,y)$

即
$$(-1,2)=(-1-x,-2-y)，$$

所以
$$\begin{cases}-1-x=-1，\\-2-y=2.\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x=0，\\y=-4.\end{cases}$$

即点 D 的坐标为 $(0,-4)$.

4.3 向量平行的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，且 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，则存在实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，由平面向量基本定理可知

$$x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}=\lambda(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=\lambda x_2\boldsymbol{i}+\lambda y_2\boldsymbol{j}.$$

于是
$$x_1=\lambda x_2，\quad ①$$
$$y_1=\lambda y_2.\quad ②$$

①×y_2－②×x_2，得

$$x_1y_2-x_2y_1=0.$$

若 $y_1\neq 0$ 且 $y_2\neq 0$(即向量 $\boldsymbol{b}$ 不与坐标轴平行)，则上式可变形为

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}.$$

我们可以得出：

定理 若两个向量(与坐标轴不平行)平行，则它们相应的坐标成比例.

定理 若两个向量相对应的坐标成比例，则它们平行.

例 4 O 是坐标原点，$\vec{OA}=(k,12)$，$\vec{OB}=(4,5)$，$\vec{OC}=(10,k)$，当 k 为何值时，A,B,C 三点共线？

解 依题意，得

$$\vec{AB}=(4,5)-(k,12)=(4-k,-7),$$
$$\vec{BC}=(10,k)-(4,5)=(6,k-5).$$

A,B,C 三点共线的充要条件是$\vec{AB}$，$\vec{BC}$共线，依向量共线的充要条件可得

$$(4-k)(k-5)-6\times(-7)=0.$$

解得 $k=-2$ 或 $k=11$，

所以，当 $k=-2$ 或 $k=11$ 时，A,B,C 三点共线.

练 习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-5,4)$，$\boldsymbol{b}=(7,-2)$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $-7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 的坐标.
3. 已知 A,B 两点的坐标，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$的坐标：

   (1) $A(2,-3)$，$B(-2,3)$；　　(2) $A(0,4)$，$B(1,0)$.
4. 已知作用在原点的三个力：$\boldsymbol{F}_1=(-1,-2)$，$\boldsymbol{F}_2=(3,2)$，$\boldsymbol{F}_3=(-1,2)$，求这些力的合力 $\boldsymbol{F}$ 的坐标.
5. 判断下列向量是否平行：

   (1) $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{4}{3},2\right)$.
6. 已知 A,B,C 三点的坐标分别为 $(0,-3)$，$(1,-1)$，$(3,3)$，判断向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$是否共线.

习 题 2—4

A 组

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的坐标.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-8,6)$，$\boldsymbol{c}=(4,6)$，求 $2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，并用基底向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 将该向量表示出来.
3. 已知$\overrightarrow{AB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,1)$，求$\overrightarrow{BC}$的坐标.
4. 在平面内以点 O 的正东方向为 x 轴正向，正北方向为 y 轴正向建立直角坐标系. 质点在平面内做直线运动，分别求下列位移向量的坐标：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 表示沿东偏北 30°移动了 3 个长度单位；

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 表示沿西北方向移动了 4 个长度单位；

(3) 向量 $\boldsymbol{c}$ 表示沿西偏南 60°移动了 3 个长度单位；

(4) 向量 $\boldsymbol{d}$ 表示沿东南方向移动了 4 个长度单位.

5. 作用于原点 O 的三个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 平衡. 已知 $\boldsymbol{F}_1=(2\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{F}_2=(-2\sqrt{3},4)$，求 $\boldsymbol{F}_3$.

6. 判断下列三点是否共线：

(1) $A(0,1)$，$B(4,1)$，$C(-1,2)$；

(2) $D(1,1)$，$E(-1,5)$，$F(3,-3)$；

(3) $G(1,1)$，$H(3,5)$，$L(-2,-5)$.

7. 已知两点 $A(2,3)$，$B(-4,5)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的坐标.

B 组

1. 已知 $A(7,8)$，$B(3,5)$，$C(4,3)$，M，N 分别是 AB，AC 的中点，D 是 BC 的中点，MN 与 AD 交于 F. 求 $\overrightarrow{DF}$.

2. 若点 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(x,5)$ 共线，求点 C 的坐标.

3. 怎样用坐标表示平面向量基本定理?

4. 用坐标表示平面向量，对于向量的运算及向量关系的研究带来什么变化? 谈谈你的体会.

§5　从力做的功到向量的数量积

实例分析

在物理学中，我们知道，一个物体受到力的作用，如果在力的方向上发生一段位移，我们就说这个力对物体做了功.

如果力的方向跟物体运动的方向相同，功就等于力的大小和位移大小的乘积. 如果当力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与物体运动的方向成 θ 角时，如图 2-32，将力 $\boldsymbol{F}$ 进行分解：

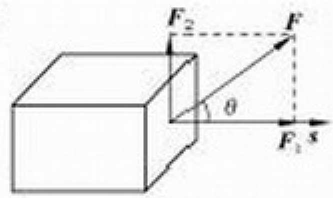


图 2-32

与位移方向平行的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 满足 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\cos\theta$，物体在 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向上产生了位移 $\boldsymbol{s}$，因而对物体做的功为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta\cdot|\boldsymbol{s}|$；

与位移方向垂直的分力 $\boldsymbol{F}_2$，由于没有使物体在该分力的方向上产生位移，因而对物体不做功.

可见，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

当 $0°\leqslant\theta<90°$ 时，$W>0$，即力 $\boldsymbol{F}$ 做正功；当 $\theta=90°$，即力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与位移 $\boldsymbol{s}$ 的方向垂直时，$W=0$，力 $\boldsymbol{F}$ 不做功；当 $90°<\theta\leqslant180°$ 时，$W<0$，即力 $\boldsymbol{F}$ 做负功.

力对物体所做的功，可以看作力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 这两个向量的某种运算的结果.

问题提出

对于一般的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如何定义这种运算呢？

下面，我们引入向量的数量积（或内积）的概念.

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如图 2-33 所示，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\angle AOB=\theta(0°\leqslant\theta\leqslant180°)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**.

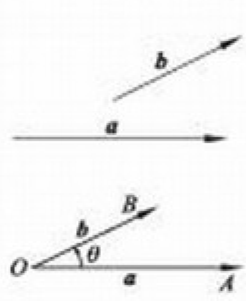


图 2-33

当 $\theta=0°$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=180°$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；当 $\theta=90°$ 时，我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向是不确定的，为今后方便起见，我们规定**零向量可与任一向量垂直**.

如图 2-34，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，过点 B 作 $BB_1\perp OA$ 于点 B_1，则

$$OB_1=|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

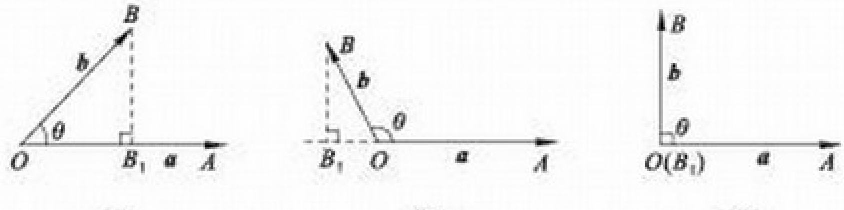


图 2-34

$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的射影. 当 θ 为锐角时，它是正值（如图 2-34(a)）；当 θ 为钝角时，它是负值（如图 2-34(b)）；当 $\theta=90°$ 时，它是 0（如图 2-34(c)）；当 $\theta=0°$ 时它等于 $|\boldsymbol{b}|$；当 $\theta=180°$ 时它等于 $-|\boldsymbol{b}|$. 特别地，在上面的物理实例中，与位移 $\boldsymbol{s}$ 方向一致的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 的长度 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$，即是力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 方向上的射影.

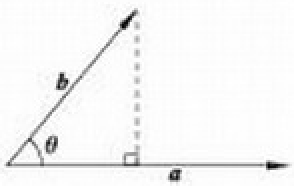


图 2-35

已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，我们把 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或**内积**）. 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（如图 2-35），即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \quad (2.10)$$

由此可以看出，两个向量的数量积是一个数量，这个数量的大小与这两个向量的长度及夹角有关. 它的几何意义是：

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上射影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积，或 $\boldsymbol{b}$ 的长度 $|\boldsymbol{b}|$ 与 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上射影 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 的乘积.

当两个向量相等时，两个向量的数量积等于向量长度的平方：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2. \quad (2.11)$$

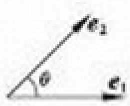


图 2-36

当两个向量都是单位向量时，它们的数量积就等于它们夹角的余弦值（如图 2-36）.

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，则

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos\theta=\cos\theta. \quad (2.12)$$

向量数量积的物理意义是：

力对物体做功，就是力 $\boldsymbol{F}$ 与其作用下物体的位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

由向量数量积的定义和几何意义，我们可得到如下性质：

(1) 若 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta.$$

(2) 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；反之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 通常记作

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

(3) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq0)$.

(5) 对任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时等号成立.

向量的数量积运算满足哪些运算定律呢?

首先由向量数量积的定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,可以知道,向量数量积运算满足交换律.

根据向量数量积的物理意义,不难理解:当力扩大 λ 倍时,力所做的功也扩大 λ 倍;两个力的合力做的功等于这两个力分别做功的和.

由此可以知道:向量数量积运算与数乘向量的运算是可交换的;向量数量积运算对向量的和的运算是可分配的.

上述讨论表明,若给定向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ,我们有以下结果:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}; \tag{2.13}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}); \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}. \tag{2.15}$$

向量的数量积运算是研究空间图形度量问题和位置关系问题的有力工具.涉及长度、夹角、平行、垂直的几何问题,通常可以运用向量数量积运算加以解决.

拓 展

性质(1)(2)的几何证明容易得出,请同学们结合图 2-37,并根据 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(即 $\overrightarrow{OB}$)在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影等于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影的和,即 $OB_1=OA_1+A_1B_1$,给出(3)的几何证明.

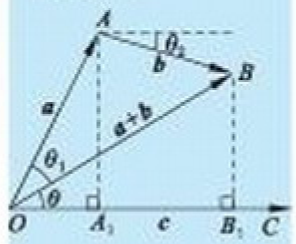


图 2-37

此外,再请同学们思考,向量的数量积满足结合律吗?

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=150^\circ$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3\times4\times\cos150^\circ=12\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-6\sqrt{3}$.

练 习 1

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,且 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=120^\circ$,且 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=2$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

例 2 在△ABC 中,设边 BC,CA,AB 的长度分别为 a,b,c,证明:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

证明 如图 2-38,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,则

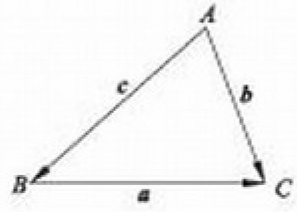


图 2-38

$$\begin{aligned}a^2&=|\boldsymbol{a}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

$$=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可证其他二式.我们把这个结果称为余弦定理,以后我们还要专门讨论它的意义.

例 3 证明菱形的两条对角线互相垂直.

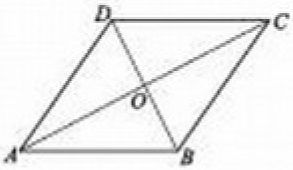


图 2-39

证明 菱形 $ABCD$ 中,$AB=AD$(如图 2-39),

由于 $\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{AB}$,$\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$,

可得
$$\vec{AC}\cdot\vec{BD}=(\vec{AD}+\vec{AB})\cdot(\vec{AD}-\vec{AB})$$
$$=(\vec{AD})^2-(\vec{AB})^2$$
$$=|\vec{AD}|^2-|\vec{AB}|^2$$
$$=0,$$

所以 $\vec{AC}\perp\vec{BD}$.

即菱形的两条对角线互相垂直.

例 4 已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°,求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 的夹角.

解 由单位向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°,得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos 60°=\frac{1}{2},$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1)$$
$$=-2\,\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2$$
$$=-2-\frac{1}{2}+1=-\frac{3}{2}. \quad ①$$

又 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|^2=|\boldsymbol{e}_1|^2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+|\boldsymbol{e}_2|^2=3$,

$|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1|^2=4|\boldsymbol{e}_1|^2-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+|\boldsymbol{e}_2|^2=3$,

所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$. ②

由①②可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}.$$

又 $0<\theta<\pi$,所以 $\theta=120°$.

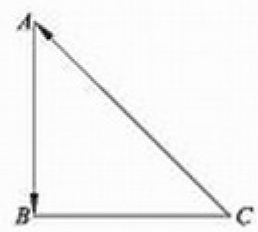
练 习 2

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=120°$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
2. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$.
3. 计算下列各式：
   (1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$.
4. 如果$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否推出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$？为什么？
5. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$是否成立？为什么？

习 题 2—5

A 组

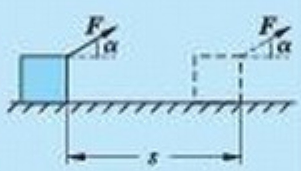
1. 求下列向量的模以及在这些向量方向上的单位向量.
   (1) $\boldsymbol{a}=(-1,2)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(3,4)$；
   (3) $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$；　　(4) 由点$A(2,-5)$，$B(-1,-2)$所构成的向量$\overrightarrow{AB}$.
2. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，求：
   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；
   (3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$；　　(4) $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.
3. 设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=5$，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，计算：
   (1) $|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$；　　(2) $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|$.
4. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.
5. 设$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12\sqrt{2}$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$.
6. 如图，在等腰直角三角形ABC中，斜边$AC=2\sqrt{2}$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.
7. 已知非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$互相垂直. 求证$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.



(第6题)

B 组

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-1$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$.
2. 用向量方法证明：等腰三角形底边上的中线垂直于底边.
3. 质量$m=2.0$ kg的物体，受到与水平方向夹角为$\alpha=37°$的斜向上拉力$\boldsymbol{F}$的作用，沿水平面移动了$s=1.0$ m的距离(如图所示). 已知$F=10$ N，物体受到的摩擦力是它与水平面间压力的0.2倍，求力$\boldsymbol{F}$对物体做的功.(取$g=10$ m/s^2，$\sin 37°=0.6$，$\cos 37°=0.8$)



(第3题)

§6 平面向量数量积的坐标表示

问题提出

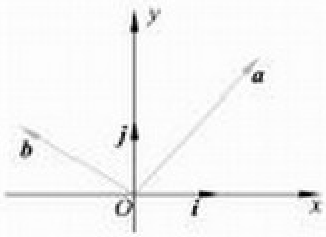


图 2-40

在直角坐标系中，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是 x 轴和 y 轴方向上的单位向量. 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$(如图 2-40)，怎样用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标来表示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$呢?

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,$

所以 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2. \tag{2.16}$$

这就是说，**两个向量的数量积等于相应坐标乘积的和.**

由此还容易得出以下结论：

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则

$$|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2,$$

或 $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2,$$

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

又因为 $$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

所以 $$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{3\times1+2\times(-1)}{\sqrt{3^2+2^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{26}}{26},$$

即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{26}}{26}$.

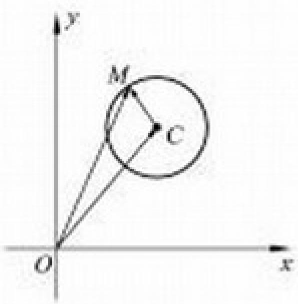


图 2-41

例 2 求以点 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程(如图 2-41).

解 设 $M(x,y)$ 是圆 C 上一点，则 $|\overrightarrow{CM}|=r$，即 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CM}=r^2$.

因为 $$\overrightarrow{CM}=(x-a,y-b),$$
所以$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，即圆的标准方程.

如果圆心在坐标原点上，这时 $a=0$，$b=0$，那么圆的标准方程就是 $$x^2+y^2=r^2.$$

例 3 已知圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，求与圆 C 相切于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程(如图 2-42).

解 设 $P(x,y)$ 为所求直线 l 上一点.

根据圆的切线性质，有 $\overrightarrow{CP_0}\perp l$，即 $\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$.

因为 $\overrightarrow{CP_0}=(x_0-a,y_0-b)$，$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0)$，
所以 $$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0.$$

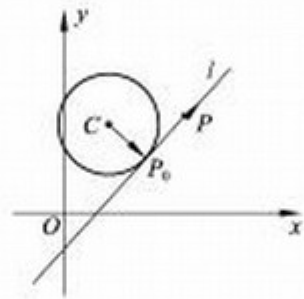


图 2-42

特别地，当圆心在坐标原点时，圆的标准方程为 $x^2+y^2=r^2$，与它相切于 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为
$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0,$$
由于 $x_0^2+y_0^2=r^2$，故此方程可化为 $x_0x+y_0y=r^2$.

由解析几何知，给定斜率为 k 的直线 l，则向量 $\boldsymbol{m}=(1,k)$ 与直线 l 共线，我们把与直线 l 共线的非零向量 $\boldsymbol{m}$ 称为直线 l 的**方向向量**.

例 4 已知直线 l_1：$3x+4y-12=0$ 和 l_2：$7x+y-28=0$，求直线 l_1 和 l_2 的夹角.

解 任取直线 l_1 和 l_2 的方向向量
$$\boldsymbol{m}=\left(1,-\frac{3}{4}\right)\text{和 }\boldsymbol{n}=(1,-7).$$
设向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角为 θ，因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\cos\theta$，从而
$$\cos\theta=\frac{1\times1+\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-7)}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\times\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
所以 $\theta=45°$，即直线 l_1 和 l_2 的夹角为 $45°$.

练 习

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,2\sqrt{3}-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，求：
   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的大小.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-6,9)$，求证 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

习 题 2—6

A 组

1. 判断下列各对向量是否垂直：

(1) $\boldsymbol{a}=(-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,6)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(7,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,14)$；

(3) $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,\frac{2}{3}\right)$；

(4) $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(5,-3)$.

2. 已知三点 $A(7,5)$，$B(2,3)$，$C(6,-7)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

3. 已知两点 $A(-1,0)$，$B(0,2)$，求满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5$，$|\overrightarrow{AD}|^2=10$ 的点 D 的坐标.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,0)$，$\boldsymbol{b}=(k,5)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $135°$，求 k 的值.

5. 已知三点 $A(-1,-1)$，$B(2,3)$，$C(3,-1)$，求证：$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

6. 已知直线 l_1：$18x+6y-17=0$ 和 l_2：$5x+10y-9=0$，求直线 l_1 和 l_2 的夹角.

B 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos 75°, \sin 75°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 15°, \sin 15°)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 你能否不利用公式计算而直接判断出 $\boldsymbol{m}=(\cos(-30°), \sin(-30°))$ 与 $\boldsymbol{n}=(\cos 100°, \sin 100°)$ 的夹角是多少?

2. 如何利用向量的数量积判断两个向量的夹角是锐角还是钝角? 平面向量的数量积有哪些用途?

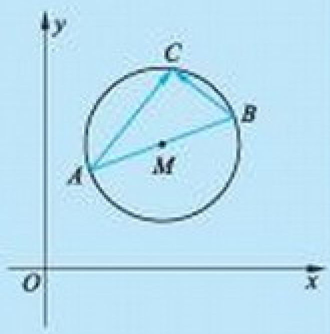
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$，根据下列条件求 k 的值：

(1) $\angle A=90°$；　(2) $\angle B=90°$；　(3) $\angle C=90°$.

4. 已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，求证：$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$.

5. 已知点 $A(1,0)$，$B(5,-2)$，$C(8,4)$，$D(4,6)$. 求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

6. 如图所示，已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，试求以 AB 为直径的圆的方程.



(第 6 题)

§7　向量应用举例

向量在数学和物理学中有着广泛的应用.下面我们列举它的一些典型应用,体会向量的作用.

7.1　点到直线的距离公式

在数学2中,我们学习了点到直线的距离公式.

若$M(x_0,y_0)$是平面上一定点,它到直线$l:Ax+By+C=0$的距离d为:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

其中,我们只给出了证明思路.现在用向量方法给出一个比较简单的证明.

证明　如图2-43所示,$M(x_0,y_0)$是直线外一定点,$P(x,y)$是直线上任意一点,由直线$l:Ax+By+C=0$,可以取它的方向向量$\boldsymbol{v}=(B,-A)$.一般地,称与直线的方向向量垂直的向量为该直线的法向量.

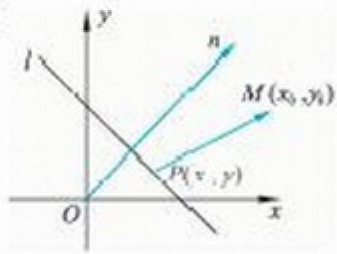


图2-43

设$\boldsymbol{n}=(s,t)$为直线l的法向量,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}&=(s,t)\cdot(B,-A)\\&=sB-tA=0,\end{aligned}$$

我们不妨取$s=A$,$t=B$,则可以得到直线l的一个法向量$\boldsymbol{n}=(A,B)$,$\boldsymbol{n}$的单位向量

$$\boldsymbol{n}_0=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$$

于是,点$M(x_0,y_0)$到直线l: $Ax+By+C=0$的距离等于向量$\overrightarrow{PM}$在$\boldsymbol{n}_0$方向上射影的长度:

$$\begin{aligned}d&=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}_0|\\&=\left|(x_0-x,y_0-y)\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)\right|\\&=\left|\frac{A(x_0-x)+B(y_0-y)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\\&=\left|\frac{Ax_0+By_0-(Ax+By)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.\end{aligned}$$

又因为 $P(x,y)$ 为 l 上任意一点，所以 $c=-(Ax+By)$，

故
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.17}$$

例 1 求点 $P(1,2)$ 到直线 $l:2x+y+1=0$ 的距离.

解 由点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times1+1\times2+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5},$$

所以点 $P(1,2)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{5}$.

练习

1. 求证：过点 $A_0(x_0,y_0)$ 并且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(a,b)$ 的直线方程是 $ax+by=ax_0+by_0$.
2. 已知三点 $A(-1,2)$，$B(3,4)$，$C(-2,5)$，求经过点 A 且与过 B，C 两点的直线垂直的直线方程.
3. 已知两条直线

$$l_1:mx-(2m-3)y-1=0,$$
$$l_2:(2m+5)x+(m+6)y-7=0,$$

如果 $l_1 /\!/ l_2$，求 m 的值.

7.2 向量的应用举例

一、几何中的应用举例

例 2 如图 2-44，已知 AD，BE，CF 分别是 $\triangle ABC$ 的三条高，求证：AD，BE，CF 相交于同一点.

证明 设 AD，BE 交于点 H，以下只需证明点 H 在 CF 上.

因为 $AD\perp BC$，$BE\perp CA$，

所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

又 $(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，

$(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，

两式相减，得

$\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=0$，

即 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以 $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，$CH\perp AB$，

又 $CF\perp AB$，

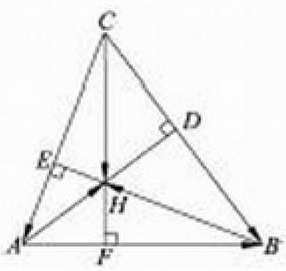


图 2-44

所以 C，H，F 三点共线，H 在 CF 上.

二、物理中的应用举例

例 3　一架飞机从 A 地向北偏西 60° 的方向飞行 1 000 km 到达 B 地，然后向 C 地飞行. 设 C 地恰好在 A 地的南偏西 60°，并且 A，C 两地相距 2 000 km，求飞机从 B 地到 C 地的位移.

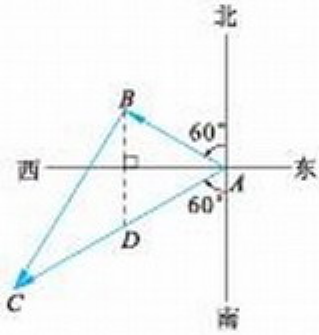


图 2-45

解　如图 2-45，设 A 在东西基线和南北基线的交点处.

依题意，$\overrightarrow{AB}$的方向是北偏西 60°，$|\overrightarrow{AB}|=1\ 000$ km；$\overrightarrow{AC}$的方向是南偏西 60°，$|\overrightarrow{AC}|=2\ 000$ km. 所以$\angle BAC=60^\circ$.

过点 B 作东西基线的垂线，交 AC 于 D，则$\triangle ABD$ 为正三角形.

所以 $$BD=CD=1\ 000\ \text{km},$$

$$\angle CBD=\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BDA=30^\circ.$$

所以 $$\angle ABC=90^\circ.$$

$$BC=AC\sin 60^\circ=2\ 000\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1\ 000\sqrt{3}\ (\text{km}),$$

$$|\overrightarrow{BC}|=1\ 000\sqrt{3}\ \text{km}.$$

答　飞机从 B 地到 C 地的位移大小是 $1\ 000\sqrt{3}$ km，方向是南偏西 30°.

例 4　已知力 $\boldsymbol{F}$ 与水平方向的夹角为 30°（斜向上），大小为 50 N，一个质量为 8 kg 的木块受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用在动摩擦因数 $\mu=0.02$ 的水平平面上运动了 20 m. 问力 $\boldsymbol{F}$ 和摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功分别为多少？（$g=10\ \text{m/s}^2$）

解　如图 2-46，设木块的位移为 $\boldsymbol{s}$，则

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 30^\circ$$

$$=50\times 20\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=500\sqrt{3}\ (\text{J}).$$

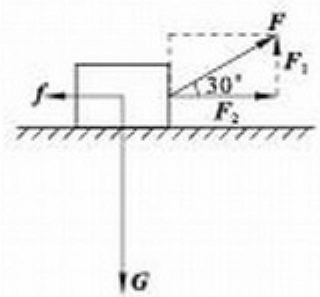


图 2-46

将力 $\boldsymbol{F}$ 分解，它在铅垂线方向上的分力 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为

$$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\sin 30^\circ=50\times\frac{1}{2}=25\ (\text{N}),$$

所以，摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{f}|=|\mu(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}_1)|=(80-25)\times 0.02=1.1\ (\text{N}).$$

因此　$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos 180^\circ=1.1\times 20\times(-1)=-22\ (\text{J}).$

答　$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 所做的功分别是 $500\sqrt{3}$ J 和 -22 J.

练习

1. 试用向量方法证明"勾股定理".
2. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 均为单位向量,其中任何两个向量的夹角均为 $120°$,求证:$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$.
3. 一轮船欲横渡某条江,已知江水流速为 3 km/h,船的静水速度为 6 km/h.
   (1) 求轮船的航行方向;
   (2) 若江面宽 $2\sqrt{3}$ km,求轮船到达对岸所需的时间.

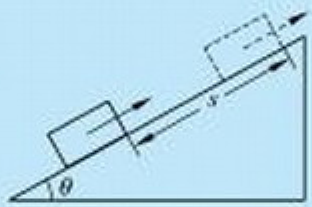
习 题 2—7

A 组

1. 已知△ABC,试求满足 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 的点 P 的轨迹($t\in\mathbf{R}$).
2. 已知向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$,试求△$ABC$ 的中线 AM 所在直线的向量方程.
3. 设M,N 分别是四边形$ABCD$ 对边AB,CD的中点,求证:$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.
4. 一个质量为 100 g 的球从 1.8 m 的高处落到一个水平板上又弹回到1.25 m的高度.求在整个过程中重力对球所做的功.

B 组

1. 已知:O 为△ABC 所在平面内一点,且满足
$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2.$$
   求证:点 O 是三条高线的交点.
2. 质量 $m=2.0$ kg 的木块,在平行于斜面向上的拉力 $F=10$ N 的作用下,沿倾角 $\theta=30°$的光滑斜面向上滑行 $s=2.0$ m 的距离(如图所示).
   (1) 分别求物体所受各力在这一过程中对物体做的功.
   (2) 在这一过程中,物体所受各力对物体做的功的代数和是多少?
   (3) 求物体所受合外力对物体所做的功,它与物体所受各个力对物体做功的代数和之间有什么关系?



(第 2 题)

3. 平面向量在几何中有哪些应用?在利用平面向量解决物理问题时,应该包括哪些解题步骤?

阅读材料

向量与中学数学

代数主要是研究运算的一门学科，它在中学数学中占有非常重要的地位．随着对代数学习的深入，运算对象在不断地拓展，对运算规律的理解也在不断地加深．有两条主线贯穿在中、小学代数学习的过程中：

一条是“数”的扩充：自然数→整数→有理数→实数→复数，以及它们的运算规律；

另一条是：数→字母、多项式→向量→函数，以及它们的运算规律．

实际上，早在 19 世纪，向量就已经成为数学家和物理学家研究的对象，但是直到 20 世纪初才被引入中学数学．自从向量进入中学后，它不仅成为中学数学的基本概念，而且也成为中学数学中最基本、最重要的内容之一．

向量是代数研究最重要的对象之一．它不仅可以进行加减运算，与实数结合进行数乘运算，而且还可以进行内积等运算．在以后的学习中，我们还能学到向量的其他运算．

向量不仅仅是代数研究的对象，它还具有大小和方向，这些都是重要的几何性质，因此它也是几何研究的重要对象．利用向量的几何性质不仅可以帮助我们计算长度、面积、角度等几何度量问题，而且可以帮助我们刻画几何图形（直线、平面等），判断它们的位置关系．

向量还具有鲜明的物理学实际背景．物理学中有两种基本量：标量和矢量．矢量遍布在物理学的很多分支，它包括力、位移、速度、加速度、动量等．虽然物理学中的矢量与数学中的向量并不完全相同，例如力，它除了有方向和大小，还有作用点．数学中的向量则只有方向和大小，没有作用点．但是，这并不影响向量在物理学中的作用．

最后，向量作为沟通代数、几何、物理的桥梁，它还是最重要的数学模型之一．

资料来源：马忠林等．数学教育史．南宁：广西教育出版社，2001

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义及向量的几何表示.
2. 掌握向量加、减、数乘的运算，并理解其几何意义.
3. 了解两个向量共线的含义、向量线性运算的性质及其几何意义.
4. 了解平面向量的基本定理及其意义；掌握平面向量的正交分解及坐标表示；会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算；理解用坐标表示平面向量共线的条件.
5. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义；体会平面向量的数量积与向量射影的关系.
6. 掌握向量数量积的坐标表达式并能进行运算，会用数量积表示两个向量的夹角、判断两个向量的垂直关系.
7. 尝试用向量方法解决某些简单的平面几何问题、力学问题以及一些实际问题；体会向量是一种处理几何问题、物理问题等的工具.

二、复习本章知识，请思考以下问题，对本章内容进行归纳总结，并写出复习总结报告

1. 向量、向量的各种运算以及向量的有关定理之间存在什么逻辑关系？请你在弄清这些关系的基础上，画出本章的知识结构框图.
2. 什么是向量？它的物理背景和几何表示是什么？
3. 我们学习了哪些向量运算？它们的物理背景是什么？运算的法则是什么？满足什么运算定律？它们的坐标表示是什么？
4. 平面向量基本定理的内容是什么？它的物理背景是什么？它的主要作用是什么？
5. 向量共线定理的内容是什么？运用这个定理可以将哪些几何关系转化为向量关系来处理？

6. 比较向量运算与实数运算，它们有什么联系和区别？
7. 请通过查阅资料或上网学习，举例说明用向量方法解决数学中的哪些问题比较方便.
8. 请举例说明用向量方法可以解决物理学中的哪些问题.
9. 你认为在学习平面向量的过程中，哪些问题值得注意？

复习题二

A 组

1. 判断题：

(1) 两个长度相等的向量一定相等； (　　)

(2) 相等的向量起点必相同； (　　)

(3) 平行向量就是共线向量； (　　)

(4) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 的模小于 $\boldsymbol{b}$ 的模，则 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$； (　　)

(5) 质量、动量、功、加速度都是向量； (　　)

(6) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，则 A,B,C,D 四点必在一条直线上； (　　)

(7) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反； (　　)

(8) 在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$； (　　)

(9) 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点，则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量等于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$； (　　)

(10) 若 $\lambda\in\mathbf{R}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，当 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 时，则一定有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线； (　　)

(11) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$； (　　)

(12) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$； (　　)

(13) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影是一个模等于$|\boldsymbol{a}||\cos\theta|$（$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角），方向与 $\boldsymbol{b}$ 相同或相反的向量； (　　)

(14) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. (　　)

2. 选择题：

(1) 在四边形 $ABCD$ 中，若$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，则四边形 $ABCD$ 是(　　).

A. 矩形　　B. 菱形

C. 正方形　　D. 平行四边形

(2) 已知向量 $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1$，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则(　　).

A. $\lambda=0$　　B. $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$

C. $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$　　D. $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$ 或 $\lambda=0$

(3) 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个单位向量，下列四个命题中正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等　　B. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线　　D. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

(4) 已知两个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为 $90°$，它们的合力大小为 10 N，合力与 $\boldsymbol{F}_1$ 的夹角为 $60°$，那么 $\boldsymbol{F}_1$ 的大小为(　　).

A. $5\sqrt{3}$ N　　B. 5 N

C. 10 N　　D. $5\sqrt{2}$ N

(5) 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东航行 3 km”，$\boldsymbol{b}$ 表示“向南航行 3 km”，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示(　　).

A. 向东南航行 6 km　　B. 向东南航行 $3\sqrt{2}$ km

C. 向东北航行 $3\sqrt{2}$ km　　　　D. 向东北航行 6 km

(6) 河水的流速为 2 m/s，一艘小船想沿垂直于河岸方向以 10 m/s 的速度驶向对岸，则小船的静水速度大小为(　　).

A. 10 m/s　　　　B. $2\sqrt{26}$ m/s

C. $4\sqrt{6}$ m/s　　　　D. 12 m/s

3. 填空题：

(1) 把所有单位向量的起点平移到一点 O，则其终点构成的图形是________；

(2) 已知$\overrightarrow{AB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,1)$，则$\overrightarrow{BC}=$________；

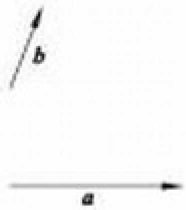
(3) 已知▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为基底向量，则$\overrightarrow{OD}=$________；

(4) 若$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=3$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________；

(5) $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角是________.

4. 飞机从 A 地向西北飞行 200 km 到达 B 地后，又从 B 地向东飞行 $100\sqrt{2}$ km 到达 C 地，再从 C 地向南偏东 60°飞行 $50\sqrt{2}$ km 到达 D 地，求飞机从 D 地飞回 A 地的位移.

5. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 如图所示，化简并作出向量$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-2\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$.



(第 5 题)

6. 已知点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(-1,-2)$，求▱$ABCD$ 的顶点 D 的坐标.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(4,2)$，求与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标.

8. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足下列条件时，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值：

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

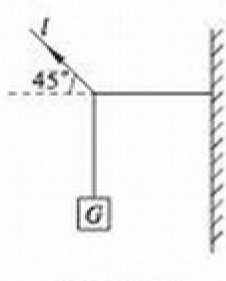
(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 135°.

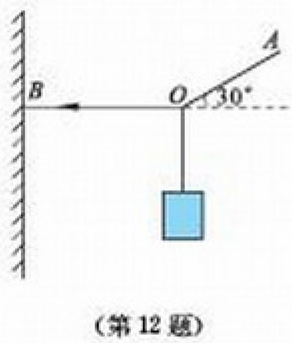
9. 已知$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{13}$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，若存在向量 $\boldsymbol{c}$，使得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=9$，试求向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

11. 如图所示，在细绳 l 上作用着一个 200 N 的力，与水平方向的夹角为 45°，细绳上挂着一个重物，使细绳的另一端与水平面平行，求物重 G 是多少.



(第 11 题)



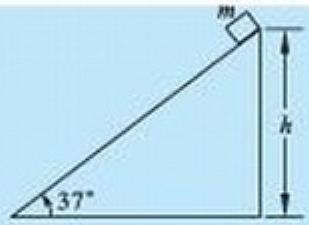
(第 12 题)

12. 如图所示，有一端 B 固定的细绳 BOA，在与水平面成 30°角的 OA 方向上作用着一个 100 N 的力，此时 BO 呈水平状，而点 O 所吊的砝码静止. 求这个砝码的质量是多少克？作用在 OB 方向上的力多大？($g=10$ N/kg)

13. 质量 $m=2.0$ kg 的物体，在 4.0 N 的水平力作用下，由静止开始在光滑水平面上运动了 3 s，求水平力在 3 s 内对物体做的功.

14. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

B 组



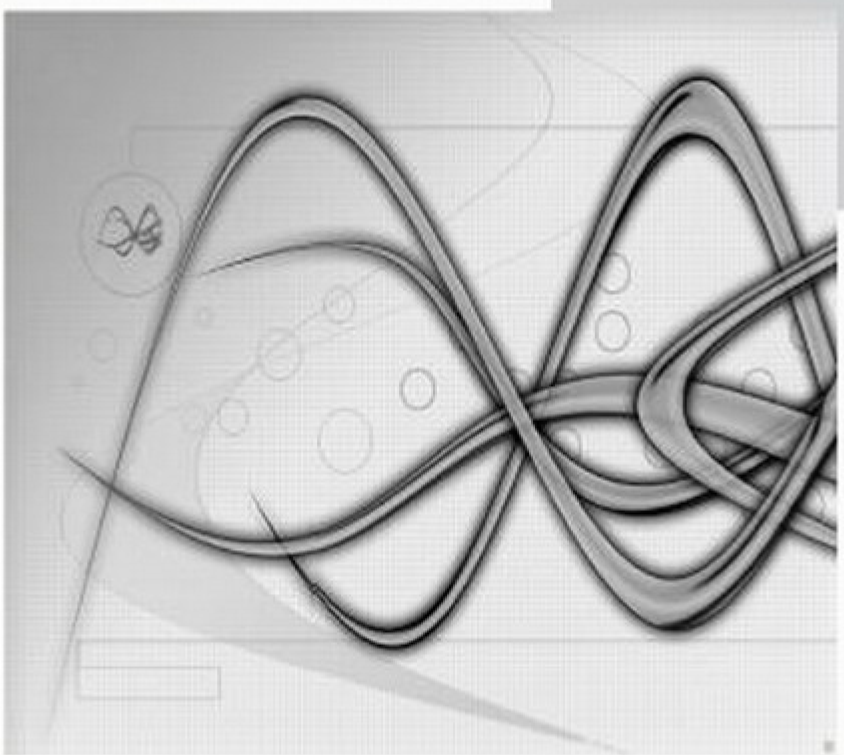
(第 1 题)

1. 如图所示，在倾角为 37°，高 $h=2$ m 的斜面上，质量为 5 kg 的物体沿斜面下滑，物体受到的摩擦力是它对斜面压力的 0.5 倍，g 取 10 m/s²．求物体由斜面顶端滑到底端的过程中，物体所受各力对物体所做的功.
2. 已知向量$\overrightarrow{AB}=(6,1)$，$\overrightarrow{BC}=(x,y)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)$，当$\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{DA}$时，求实数 x，y 应满足的关系式.
3. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，当且仅当 k 为何值时，向量$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$互相垂直？
4. 求证：顺次连接任意凸四边形各边中点，构成一个平行四边形.
5. 试证直径上的圆周角为直角.

第三章 三角恒等变形

恒等变形能力是数学学习和应用中的一项重要的基本功. 基本的三角恒等变形公式是实践中经常使用的工具. 在力学、物理、电气工程、机械制造、图像处理以及其他科学研究和工程实践中经常会用到这些公式.

本章我们将学习基本的三角恒等变形公式及其简单应用,并通过实例加深对三角恒等变形的理解. 提高自己运用三角恒等变形公式的能力.



§1　同角三角函数的基本关系

在初中我们已经知道，对于同一个锐角 α，存在关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \qquad (3.1)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha. \qquad (3.2)$$

如图 3-1 所示，当 α 推广到任意角后，在单位圆中，由勾股定理知，$OM^2+MP^2=OP^2$，即 $x^2+y^2=1$，也就是说 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 仍成立，由正切函数定义可知，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 也成立.

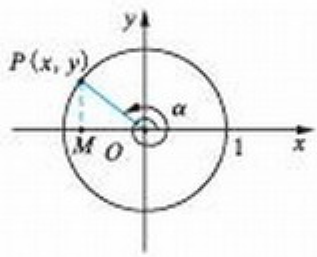


图 3-1

这两个公式说明，同一个角 α 的正弦、余弦的平方和等于1. 当 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时，同一个角 α 的正弦和余弦的商等于 α 的正切. 我们分别称它们为平方关系和商数关系.

利用这两个公式，可以由已知的一个三角函数值求出同角的其余两个三角函数值，还可以进行同角三角函数式的恒等变换，化简三角函数式或证明三角恒等式.

思考交流

同角的三角函数还有其他公式吗？如果有，你能否写出这些公式并且给予证明？

例 1　已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 在第三象限，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

解　因为　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

所以　$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

因为　α 在第三象限，$\cos\alpha<0$，

所以　$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{4}.$$

注　意

利用平方关系求三角函数值时，应根据角 α 的终边所在象限确定所求三角函数值的符号.

例 2 已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

解 因为 $\cos\alpha=\frac{12}{13}>0$，且 $\cos\alpha\neq 1$，

所以 α 是第一或第四象限的角.

当 α 是第一象限角时，$\sin\alpha>0$.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}.$$

当 α 是第四象限角时，$\sin\alpha<0$.

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{5}{13},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{12}.$$

例 3 已知 $\tan\alpha=m(m\neq 0)$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

解 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

所以 $$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha.$$

又 $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,$$

所以 $$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1,$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha.$$

所以 $$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}.$$

因为 $\tan\alpha=m\neq 0$，故 α 终边不在 x 轴上，

> **注 意**
> 求任意角三角函数值时，要特别注意符号问题.

所以 $$\cos\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当}\alpha\text{是第一、四象限角；}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当}\alpha\text{是第二、三象限角.}\end{cases}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha=\begin{cases}\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当}\alpha\text{是第一、四象限角；}\\ -\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, & \text{当}\alpha\text{是第二、三象限角.}\end{cases}$$

例 4 已知 $\tan\alpha=2$，$180^\circ<\alpha<270^\circ$，求 $\frac{3-\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}$ 的值.

解 因为 $180^\circ<\alpha<270^\circ$，所以 α 是第三象限角. 故 $\cos\alpha<0$. 仿照例 3 有：

$\frac{1}{\cos\alpha}=-\sqrt{1+\tan^2\alpha}=-\sqrt{1+2^2}=-\sqrt{5}$.

原式的分子、分母同除以 $\cos\alpha$，得

$$原式=\frac{\frac{3}{\cos\alpha}-\tan\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}+2}=\frac{-3\sqrt{5}-2}{-\sqrt{5}+2}=\frac{(3\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=19+8\sqrt{5}.$$

练　习 1

1. 已知 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\alpha$ 在第三象限，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$.
2. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.
3. 已知 $\tan\alpha=1.5$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$.
4. 已知 $\tan\alpha=-3$，求：

(1) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$；　　(2) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

例 5　化简：$\sqrt{1-\cos^2 620^\circ}$.

解　因为　$\cos 620^\circ=\cos(360^\circ+260^\circ)$

$$=\cos 260^\circ$$
$$=\cos(180^\circ+80^\circ)$$
$$=-\cos 80^\circ,$$

所以　原式$=\sqrt{1-\cos^2 80^\circ}=\sin 80^\circ$.

例 6　化简：$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$.

解　因为　$\cos\theta\neq 0$，

所以　原式$=\frac{\sin\theta}{|\cos\theta|}+\frac{|\sin\theta|}{\cos\theta}$

$$=\begin{cases}2\tan\theta, & 当\ 2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2};\\ 0, & 当\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant 2k\pi+\pi;\\ -2\tan\theta, & 当\ 2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2};\\ 0, & 当\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\theta\leqslant 2k\pi+2\pi.\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

例 7 求证：$\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

证法 1 $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$=\frac{\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=0,$$

所以 $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

证法 2 左边 $=\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$

$$=\frac{1-\sin^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$=$右边.

证法 3 因为 $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$，又 $1-\sin\alpha\neq0$，且 $\cos\alpha\neq0$，将上式等号两边同除以 $(1-\sin\alpha)\cos\alpha$，得

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

由例 7 可见，证明一个等式，通常可以证明等式两边的差为 0；也可以从等式的任一边入手，证明它等于等式的另一边；还可以转化为对另一个与其等价的等式的证明.

练 习 2

1. 化简：

(1) $\cos\theta\tan\theta$；　　(2) $\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$.

2. 求证：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；

(2) $\sin^4x+\sin^2x\cos^2x+\cos^2x=1$.

习　题　3—1

A　组

1. (1) 已知 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha$ 在第四象限，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，α 在第二象限，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

(3) 已知 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值；

(4) 已知 $\cos x=\frac{2}{3}$，求 $\sin x$，$\tan x$ 的值.

2. 已知 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$，求 $\frac{7\sin\theta-3\cos\theta}{4\sin\theta+5\cos\theta}$ 的值.

3. 已知 $\tan\theta=3$，求 $\sqrt{\sin^4\theta-3\sin\theta\cos^3\theta+\cos^4\theta}$ 的值.

4. 已知 $\sin\theta\neq0$，用 $\sin\theta$ 表示 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$.

5. 化简：

(1) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$；

(2) $(A\cos\theta+B\sin\theta)^2+(A\sin\theta-B\cos\theta)^2$；

(3) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ (180^\circ<\alpha<270^\circ)$；

(4) $\sin^4x-\sin^2x+\cos^2x$.

6. 求证：

(1) $\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$；

(2) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$；

(3) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$；

(4) $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$；

(5) $(1-\tan^4A)\cos^2A+\tan^2A=1$；

(6) $\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\cos^2x-\sin^2x$.

7. 已知 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$(x\neq0)$，求证：

(1) $x^2+y^2=\rho^2$；

(2) $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

B　组

1. 已知 $\sin x-\cos x=m$，求 $\sin x\cos x$.

2. 已知 $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\sin^4x+\cos^4x$.

3. 若 x 在第三象限，化简 $\sqrt{(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2}$.

4. 化简：$\frac{2\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sin\theta}$.

5. 求证：

(1) $\frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$；

(2) $\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\tan^2x}=2+\tan^2x$.

6. 同角三角函数的基本关系公式主要有哪些方面的用途，谈谈你的体会.

§2 两角和与差的三角函数

2.1 两角差的余弦函数

在第二章我们已经学习了向量的知识. 向量的主要作用之一是讨论几何度量问题，例如，长度和角度的问题. 从向量数量积的定义：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

我们知道：任何向量与自身的数量积为向量长度的平方；两个单位向量的数量积就等于它们之间夹角的余弦函数值，反映了它们之间夹角的大小. 向量的方法为我们探索三角函数关系提供了一种非常重要的思想方法.

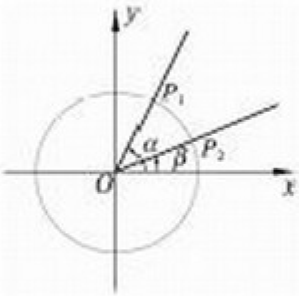


图 3-2

在直角坐标系中，如图 3-2，以原点为中心，单位长度为半径作单位圆，又以原点为顶点，x 轴非负半轴为始边分别作角 α，β，且 $\alpha>\beta$. 我们首先研究 α，β 均为锐角的情况. 设它们的终边分别交单位圆于点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,\sin\beta)$，这样，我们就得到两个单位向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$. 由于这两个向量的夹角为 $\alpha-\beta$，所以，我们可以得到：

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos(\alpha-\beta). \quad ①$$

另一方面，向量数量积可以用坐标表示，因此我们又可以得到：

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad ②$$

由①②两式，可得一个非常重要的三角函数公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad ③$$

我们称③式为两角差的余弦公式，记作 $C_{\alpha-\beta}$.

实际上，利用诱导公式可以证明，当 α，β 为任意角时，③式仍成立.

问题与思考

当角 α，β 为任意角时，请给出公式 $C_{\alpha-\beta}$ 的证明.

2.2 两角和与差的正弦、余弦函数

公式 $C_{\alpha-\beta}$ 中 α，β 可以是任意角，由此你能推出两角和的余弦公式吗？

你能否利用诱导公式从余弦的两角和公式推出正弦的两角和公式吗？进而能再推出两角差的正弦公式吗？

抽象概括

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；　　$(C_{\alpha+\beta})$　(3.3)

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；　　$(C_{\alpha-\beta})$　(3.4)

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；　　$(S_{\alpha+\beta})$　(3.5)

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.　　$(S_{\alpha-\beta})$　(3.6)

上述结论我们分别称之为：两角和的余弦公式、两角差的余弦公式、两角和的正弦公式、两角差的正弦公式.

利用这些公式，可以解决三角函数的估算与求值问题.

例1　不查表，求 $\cos 75°$，$\cos 15°$的值.

解　
$$\begin{aligned}\cos 75°&=\cos(45°+30°)\\&=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15°&=\cos(45°-30°)\\&=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例2　已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\cos(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$的值.

解　由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，得

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5};$$

又由　$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，得

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{12}{13}.$$

所以

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$=-\frac{33}{65};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$=\frac{63}{65}.$$

练 习

1. 等式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 一定成立吗？举例说明.

   等式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$ 一定成立吗？为什么？

2. 求下列各式的值：

   (1) $\cos 105°$；　　(2) $\cos\left(-\frac{25\pi}{12}\right)$.

3. 求下列各式的值：

   (1) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$；

   (2) $\sin 95°\sin 35°+\cos 95°\cos 35°$.

4. 已知 $\sin\theta=\frac{3}{4}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

5. 请用本节学过的公式验证和推导诱导公式.

   (1) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$；

   (2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$________；　　(3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$________.

2.3 两角和与差的正切函数

在两角和与两角差的正弦、余弦公式的基础上，你能用 $\tan\alpha$，$\tan\beta$表示 $\tan(\alpha+\beta)$和 $\tan(\alpha-\beta)$吗？其中 α，β应该满足什么条件？

抽象概括

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}; \qquad (T_{\alpha+\beta}) \quad (3.7)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \qquad (T_{\alpha-\beta}) \quad (3.8)$$

我们把公式 $T_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha-\beta}$分别称作两角和的正切公式与两角差的

正切公式. 从推导的过程可以知道，α，β 有一定的取值范围，即

$$\alpha \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

$$\beta \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

$$\alpha\pm\beta \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),$$

这样，才能保证 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 及 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 都有意义.

一般地，我们把公式 $S_{\alpha+\beta}$，$C_{\alpha+\beta}$，$T_{\alpha+\beta}$ 都叫作和角公式，而把公式 $S_{\alpha-\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$，$T_{\alpha-\beta}$ 都叫作差角公式.

例 3　已知 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

(1) 求 $\tan(\alpha-\beta)$；　　(2) 求 $\alpha+\beta$ 的值.

解　(1) 因为　$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$，

所以　$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=7.$$

(2) 因为　$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=1,$$

又因为　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，　所以　$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

在 $\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{3\pi}{2}$ 之间，只有 $\frac{5\pi}{4}$ 的正切值等于 1，所以

$$\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}.$$

例 4　计算 $\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$ 的值.

解　因为　$\tan 45^\circ=1$，所以

$$\begin{aligned}\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}&=\frac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}\\&=\tan(45^\circ-15^\circ)\\&=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

例 5　若 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

解　因为 $\alpha+\frac{\pi}{4}=(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，所以

$$\begin{aligned}\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)&=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}\\&=\frac{3}{22}.\end{aligned}$$

练　习

1. 求 $\tan 15^\circ$，$\tan 105^\circ$ 的值.
2. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\tan 43^\circ+\tan 17^\circ}{1-\tan 43^\circ\tan 17^\circ}$；　　(2) $\dfrac{1+\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan\frac{5\pi}{12}}$.

3. 已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，$\sin\beta=-\frac{15}{17}$，α，β 分别是第二、第三象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$ 的值.
4. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$，$90^\circ<\beta<180^\circ$，求证：$\alpha+\beta=135^\circ$.

习　题 3—2

A　组

1. 求下列函数值：

$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5\pi}{12}$，$\cos\left(-\frac{31\pi}{12}\right)$，$\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)$，$\tan\frac{\pi}{12}$，$\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

利用已学过的三角函数公式，你还能求出哪些角的三角函数值？请举三个例子.

2. 利用特殊角的三角函数值计算：

(1) $\sin 10^\circ\cos 50^\circ+\sin 50^\circ\cos 10^\circ$；　　(2) $\cos 15^\circ\cos 105^\circ-\sin 105^\circ\sin 15^\circ$；

(3) $\cos^2 105^\circ-\sin^2 105^\circ$；　　(4) $\sin 20^\circ\sin 10^\circ-\cos 10^\circ\sin 70^\circ$；

(5) $\dfrac{\tan 22^\circ+\tan 23^\circ}{1-\tan 22^\circ\tan 23^\circ}$；　　(6) $\dfrac{1-\tan 75^\circ}{1+\tan 75^\circ}$.

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，α，β 均为第二象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

4. 已知 $\cos\varphi=\frac{3}{5}$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

5. 已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\pi<\alpha<2\pi$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 及 $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ 的值.

6. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

7. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-2$，求 $\tan\alpha$ 的值.

8. 请利用两角和与差的正弦、余弦公式推导正弦、余弦函数的诱导公式，写出推导过程.

9. 请写出公式 $T_{\alpha+\beta}$ 的推导过程.

B　组

1. 已知 $\sin\alpha=-0.4$，你能求出多少个不同角的三角函数值？

2. 化简：

(1) $\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$；　　(2) $\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha$；

(3) $\sin\alpha+\cos\alpha$；　　(4) $\frac{\tan 15^\circ+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan 15^\circ}$；

(5) $\sin 200^\circ\sin 310^\circ+\cos 340^\circ\cos 50^\circ$.

3. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\beta\tan(\alpha+\beta)}$.

4. 画出从公式 $C_{\alpha-\beta}$ 到 $T_{\alpha\pm\beta}$ 的知识结构框图.

§3 二倍角的三角函数

在两角和的正弦、余弦、正切公式中，α,β 可以为任意角，由此出发，你能推出 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$ 的公式吗？

利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，你是否能只用 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$ 表示 $\cos 2\alpha$？

抽象概括

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\qquad (S_{2\alpha})\quad (3.9)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\qquad (C_{2\alpha})\quad (3.10)$$

$$=1-2\sin^2\alpha\qquad (3.11)$$

$$=2\cos^2\alpha-1;\qquad (3.12)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\qquad (T_{2\alpha})\quad (3.13)$$

我们把以上公式称为二倍角的正弦、余弦、正切公式，统称倍角公式. 这些公式仅对于使等号两边都有意义的 α 成立.

下面我们通过一些具体的实例，体会这些公式的应用.

例 1 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$ 的值.

解 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$.

例 2 设 α 是第二象限角，已知 $\cos\alpha=-0.6$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$ 的值.

注 意

通过开平方求三角函数值时，一定要根据角所在的象限，确定三角函数值的符号.

解 因为 α 是第二象限角， 所以 $\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$.

由于 $\cos\alpha=-0.6$，故

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=0.8.$$

可得

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-0.96,$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times(-0.6)^2-1=-0.28,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{24}{7}.$$

例 3　在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC=2BC$（如图 3-3），求角A的正弦值.

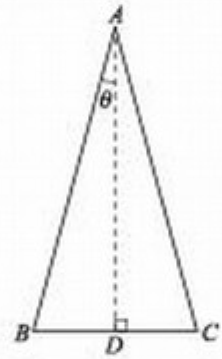


图 3-3

解　作$AD\perp BC$于D，设$\angle BAD=\theta$，那么$\angle A=2\theta$.

因为 $$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}AB,$$

所以 $$\sin\theta=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{4}.$$

因为$0<2\theta<\pi$，所以$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，于是$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

故 $$\sin A=\sin 2\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

例 4　要把半径为R的半圆形木料截成长方形（如图 3-4），应怎样截取，才能使长方形面积最大？

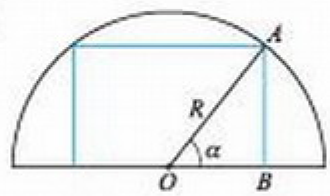


图 3-4

解　如图，设圆心为O，长方形面积为S，$\angle AOB=\alpha$，则

$$AB=R\sin\alpha,\ OB=R\cos\alpha,$$
$$\begin{aligned}S&=(R\sin\alpha)\cdot 2(R\cos\alpha)\\&=2R^2\sin\alpha\cos\alpha\\&=R^2\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

当$\sin 2\alpha$取最大值，即$\sin 2\alpha=1$时，截面面积最大. 不难推出，$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，长方形截面面积最大，最大截面面积等于R^2.

练习 1

1. 求下列各式的值：

(1) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$；　(2) $\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ$；

(3) $1-2\sin^2 15^\circ$；　(4) $2\cos^2 22.5^\circ-1$；

(5) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$；　(6) $\frac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$.

2. 已知$\cos\alpha=\frac{7}{8}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$的值.

3. 已知$\tan\alpha=\sqrt{2}-1$，求$\tan 2\alpha$的值.

例 5　利用二倍角公式证明：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad(3.14)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\qquad(3.15)$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\qquad(3.16)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\qquad(3.17)$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\qquad(3.18)$$

证明 在二倍角公式

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

中，用$\frac{\alpha}{2}$代替α得

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1.$$

由此得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

用上面两个公式两边分别相除，可得：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

又根据正切函数的定义，得到：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

这样我们就得到另外两个公式：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

以上我们得到的五个有关半角三角函数的公式，称之为半角公式.

在这些公式中，根号前面的符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限相应的三角函数值的符号确定，如果$\frac{\alpha}{2}$所在象限无法确定，则应保留根号前面的正、负两个符号.

例 6　已知 $\cos\alpha=\frac{7}{25}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

解　$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\pm\frac{3}{5}$，

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\pm\frac{4}{5},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\pm\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\pm\frac{3}{4}.$$

例 7　已知 $\sin 2\alpha=-\frac{12}{13}$，$\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\tan\alpha$.

解　因为 $\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$，故 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\alpha$ 是 2α 的一半，运用半角公式，有

$$\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13},$$

所以
$$\tan\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1+\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{3}{2}.$$

> **验　证**
> 用半角正切的另外两个公式计算所得结果是否一致.

例 8　已知 $\sin 2\,010°=-\frac{1}{2}$，求 $\sin 1\,005°$，$\cos 1\,005°$，$\tan 1\,005°$ 的值.

解　因为 $2\,010°=5\times360°+210°$ 是第三象限的角，所以

$$\cos 2\,010°=-\sqrt{1-\sin^2 2\,010°}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $1\,005°=2\times360°+285°$ 是第四象限的角，所以

$$\sin 1\,005°=-\sqrt{\frac{1-\cos 2\,010°}{2}}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 1\,005°=\sqrt{\frac{1+\cos 2\,010°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\tan 1\,005°=\frac{\sin 1\,005°}{\cos 1\,005°}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=-\frac{8+4\sqrt{3}}{4}$$
$$=-2-\sqrt{3}.$$

练习 2

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$.

2. 求 $\sin\frac{\pi}{8}$，$\cos\frac{\pi}{8}$ 和 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的值.

3. 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5}$，角 x 终边在第一象限，求 $\tan\frac{x}{2}$ 的值.

习 题 3—3

A 组

1. 求下列各式的值.

(1) $2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$；　(2) $\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}$；　(3) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$；　(4) $1-2\sin^2 67^\circ 30'$；

(5) $\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$；　(6) $\sin 15^\circ\sin 75^\circ$；　(7) $2\cos^2 150^\circ-1$；　(8) $\frac{2\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{5\pi}{12}}$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 的值.

3. 已知 $\cos\alpha=\frac{8}{17}$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

4. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$，$\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

5. 已知等腰三角形一个底角的正弦值为 $\frac{3}{5}$，求这个三角形的顶角的正弦、余弦及正切的值.

6. 已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$270^\circ<\alpha<360^\circ$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

7. 已知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$180^\circ<\alpha<270^\circ$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

8. 已知 $\tan\alpha=2$，α 是锐角，求 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

9. 求证：

(1) $\tan A-\frac{1}{\tan A}=-\frac{2}{\tan 2A}$；

(2) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$；

(3) $\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$；

(4) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$；

(5) $1-\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

10. 已知等腰三角形顶角的余弦值等于$\frac{5}{13}$，求这个三角形底角的正弦、余弦和正切值.

11. 利用两角和与差的正弦、余弦公式证明：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

B　组

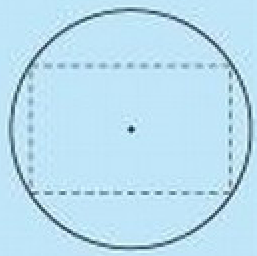
1. 已知 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

2. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3$，求 $\sin 2\theta-2\cos^2\theta$ 的值.

3. 求证：$\cos^4\theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta$.

4. 若 $\sin\alpha$ 与 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的比是 8 : 5，$0^\circ<\alpha<180^\circ$，求 $\cos\alpha$，$\sin\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\alpha}{4}$ 的值.

5. 把如图中的一段半径为 R 的圆木锯成横截面为矩形的木料，怎样截取才能使横截面面积最大？



（第 5 题）

6. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1.2$，你能求出哪些角的三角函数值？

7. 画出从公式 $C_{\alpha-\beta}$ 到公式 $T_{\frac{\alpha}{2}}$ 的知识结构框图.

信息技术应用

利用现代信息技术探究一些周期函数的合成

在自然界中，存在着大量的周期函数，两个周期函数合成后，是否还是周期函数呢？周期函数的类型是否发生了改变？比如：两个正弦电流 $i_1=3\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$，$i_2=4\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$ 合成后是否仍是正弦电流呢？类似地，两个声波或光波合成后又是怎样的？

下面我们利用现代信息技术来研究其中的一些较简单的问题.

函数 $y_1=A_1\sin(\omega_1 x+\theta)$，$y_2=A_2\sin(\omega_2 x+\varphi)$ 叠加后，即函数 $y=A_1\sin(\omega_1 x+\theta)+A_2\sin(\omega_2 x+\varphi)$ 是否仍是正弦型函数呢？若不是，需满足怎样的条件？

一、利用图形计算器或其他绘图工具绘制下列函数图像：

$y=\sin x$，$y=\sqrt{3}\cos x$，$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，

观察 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图像，探索这个函数的振幅，周期，初相，单调性.

二、利用图形计算器或其他绘图工具仿照上面的步骤，画出 $y=3\sin x+4\cos x$ 的图像，探索函数性质.

三、请在上面实验的基础上，猜测并探究 $y=a\sin x+b\cos x$ 的性质，尝试确定该类型函数中参量 a，b 的关系.

四、试求前面提到的两个正弦电流合成后的电流的振幅、周期、初相.

五、上面研究的函数是同周期的函数的合成，对于周期不同的两个函数，结果又是怎样？仿照上面的方法，探索函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos 3x$ 的性质.

阅读材料

三角函数叠加问题

我们知道，在交流电、简谐振动及各种“波”等问题的研究中，三角函数发挥了重要的作用. 在这些实际问题中，经常会涉及“波”的叠加，在数学上常常可以归结为三角函数的叠加问题. 在这里，我们只讨论一种特殊的情况：周期相同的正弦函数、余弦函数的叠加.

设 $y_1=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$，$y_2=4\sin 2t$ 表示两个不同的正弦“波”，它们叠加后的函数是

$$
\begin{aligned}
y=y_1+y_2&=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)+4\sin 2t\\
&=3\left(\sin 2t\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2t\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)+4\sin 2t\\
&=3\cos 2t+4\sin 2t.
\end{aligned}
$$

实际上，我们可以采取描点作图的方法来研究这个函数的性质. 在这里，我们介绍一种解析的方法：

$$
\begin{aligned}
y&=3\cos 2t+4\sin 2t\\
&=\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 2t+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 2t\right)\\
&=5\left(\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t\right).
\end{aligned}
$$

如图 1，我们设 $\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，其中

$$\tan\varphi=\frac{3}{4}，\varphi\approx 36°52'\approx 0.64\text{ rad}.$$

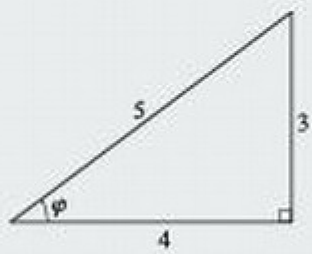


图 1

这时，

$$
\begin{aligned}
y&=5(\sin\varphi\cdot\cos 2t+\cos\varphi\cdot\sin 2t)\\
&=5\sin(2t+\varphi),
\end{aligned}
$$

所以，叠加后函数的振幅为 5，周期仍为 π.

根据这个函数的解析式 $y=5\sin(2t+\varphi)$，我们可以用五点法作出函数的图像（如图 2）.

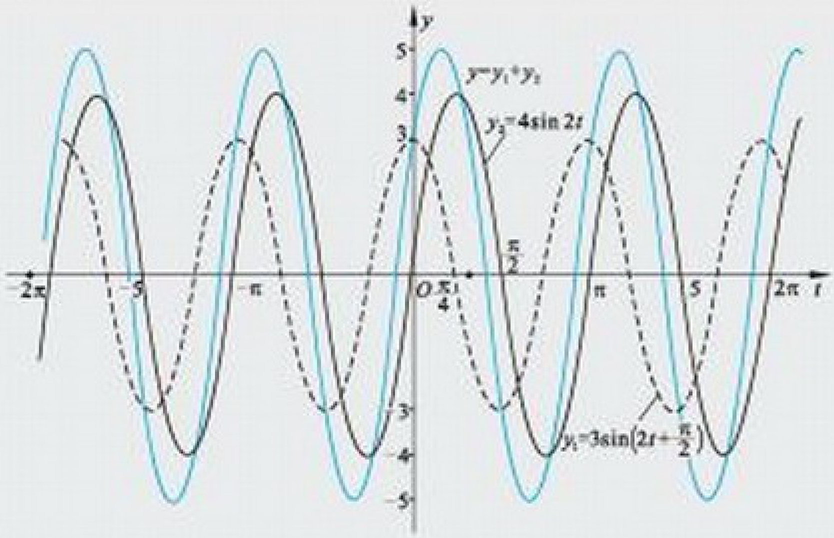


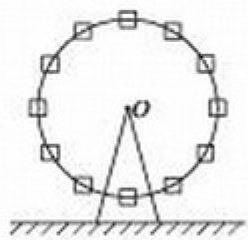
图 2

这种三角函数叠加的方法非常重要. 在这种方法中，我们通过“配方”引入辅助角 φ，这也是一种常用的技能，在这里发挥了关键的作用.

课题学习

摩天轮中的数学问题

如图，游乐场中的摩天轮匀速旋转，其中心 O 距地面 40.5 m，半径 40 m. 若从最低点处登上摩天轮，那么你与地面的距离将随时间的变化而变化，5 min 后到达最高点. 以你登上摩天轮的时间开始计时，请解答下列问题.



(1) 你能求出你与地面的距离 y 与时间 t 的函数解析式吗?

(2) 当你登上摩天轮 8 min 后，你与地面的距离是多少?

(3) 当你第 1 次距地面 30.5 m 时，用了多少时间?

(4) 当你第 4 次距地面 30.5 m 时，用了多少时间?

*(5) 当你登上摩天轮 2 min 时，你的朋友也在摩天轮最低点处登上摩天轮，请求出你的朋友与地面的距离 y 关于时间 t 的函数解析式.

*(6) 求出你和你的朋友与地面的距离差 h 关于时间 t 的函数解析式.

*(7) 你的朋友登上摩天轮多少时间后，你们俩与地面距离相等?

*(8) 你和你的朋友与地面的距离差何时最大? 最大距离差是多少?

*(9) 如果规定每位游客乘坐摩天轮观景的时间是每次 20 min. 从你的朋友登上摩天轮的时间算起，什么时候你的朋友与地面的距离大于你与地面的距离?

*(10) 当你距地面 20.5 m 时，你的朋友距地面多少米?

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 理解同角三角函数的基本关系式：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$$

2. 尝试用向量的数量积推导出两角差的余弦公式，进一步体会向量方法的作用.
3. 能从两角差的余弦公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，体会它们的内在联系.
4. 能运用上述公式进行简单的恒等变形.
5. 会用三角函数解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

二、复习本章知识，就以下问题思考、归纳、总结，写出复习小结报告

1. 同角三角函数之间有何关系？这些关系公式有什么用途？
2. 本章学习了哪些知识？它们之间存在着怎样的逻辑联系？请画出本章公式导出的链接图.
3. 两角和与两角差的三角函数之间有什么关系？它们有什么用途？
4. 余弦的倍角公式有几种形式？它们各自有什么用途？
5. 学习本章知识，运用本章公式解题时要注意哪些问题？请举例说明.
6. 请查阅资料或上网学习，用几何方法证明两角和与差的正弦、余弦公式.
7. 本章学习的是三角函数的恒等变形，即三角函数之间的等价转化，请总结本章的主要解题思路，举例说明你的体会.

复习题三

A 组

1. 化简：

(1) $\sqrt{1-2\sin(3-\pi)\cos(3-\pi)}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin 190^\circ\cos 190^\circ}}{\cos 170^\circ+\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$.

2. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，计算：

(1) $\dfrac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-4\cos\alpha}$；　　(2) $2\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$.

3. 求证：

(1) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$；

(3) $\dfrac{\tan A\sin A}{\tan A-\sin A}=\dfrac{\tan A+\sin A}{\tan A\sin A}$.

4. 选择题：

(1) 下列表达式中，正确的是(　　).

A. $\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$　　B. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

C. $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$　　D. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(2) 若 $\tan 110^\circ=a$，则 $\tan 50^\circ$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{a+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}a}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-a}{1+\sqrt{3}a}$　　C. $\dfrac{a-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}$　　D. $\dfrac{a-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}a}$

(3) 若 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=m$，且 β 为第三象限角，则 $\cos\beta$ 的值为(　　).

A. $\sqrt{1-m^2}$　　B. $-\sqrt{1-m^2}$　　C. $\sqrt{m^2-1}$　　D. $-\sqrt{m^2-1}$

(4) 化简 $\sqrt{1-\sin 20^\circ}$ 的结果是(　　).

A. $\cos 10^\circ$　　B. $\cos 10^\circ-\sin 10^\circ$

C. $\sin 10^\circ-\cos 10^\circ$　　D. $\pm(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)$

(5) $\dfrac{7}{16}-\dfrac{7}{8}\sin^2 15^\circ$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{7}{16}$　　B. $\dfrac{7}{32}$　　C. $\dfrac{7\sqrt{3}}{32}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{3}}{16}$

(6) 化简 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)$ 的值为(　　).

A. $2\tan A$　　B. $-2\tan A$　　C. $2\tan 2A$　　D. $-2\tan 2A$

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，那么 $\sin 2\alpha=$______.

6. 已知 $\sin(\alpha+45^\circ)=\dfrac{3}{5}$，$45^\circ<\alpha<135^\circ$，那么 $\sin\alpha=$______.

7. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，$225^\circ<\alpha<270^\circ$，求 $\cos 2\alpha$ 和 $\sin 2\alpha$ 的值.

8. 若 $\cos 2\alpha = a$，求 $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ 的值.

9. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，求 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

10. 求证：

(1) $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin 2\beta}{2\cos^2\beta}$；

(2) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$；

(4) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\tan 2\alpha$.

11. 求下列函数的周期及最大值、最小值.

(1) $y=\sin 3x\cos 3x$；　(2) $y=\dfrac{1}{2}-\sin^2 x$；　(3) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos x$.

12. 化简：$\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

B 组

1. 化简：

$$\cos\alpha\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，计算：

(1) $\sin\alpha-\cos\alpha$；　(2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

3. 选择题：

(1) 若 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为(　　).

A. -1　B. 1　C. $-\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{1}{2}$

(2) 在 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2a-3$ 中，a 的取值范围是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$　B. $a\leqslant\dfrac{1}{2}$　C. $a>\dfrac{5}{2}$　D. $-\dfrac{5}{2}\leqslant a\leqslant-\dfrac{1}{2}$

4. 化简：$\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=$________.

5. 若 2α 与 2β 互余，则 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=$________.

6. 计算：$\sin\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{5\pi}{12}+2\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{3\pi}{8}=$________.

7. 求 $\dfrac{\sin 8^\circ+\sin 7^\circ\cos 15^\circ}{\cos 8^\circ-\sin 7^\circ\sin 15^\circ}$ 的值.

8. 化简：$\dfrac{(1+\sin\theta+\cos\theta)\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2+2\cos\theta}}$.

9. 已知 $\sin(2\alpha+\beta)=3\sin\beta$，$\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

10. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，求 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 的值.

11. 求 $\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$的值.

12. 观察理解如下恒等变形：$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，仿此对下列函数变形，并求它们的周期、最大值、最小值以及单调区间.

(1) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$；　　(2) $y=\sin x+\cos x$.

探究活动

升旗中的数学问题

一、学习目标

通过对升旗中数学问题的求解和讨论，进一步了解相关数学知识的实际意义和作用，体会数学建模的基本过程，增强数学知识的应用意识. 理解用函数拟合数据的方法，提高对数据的观察、分析、处理及从中获取有益信息的能力.

在这个探究活动中，要特别重视观察、分析、处理数据的一般方法，信息工具和技术的合理使用及数学得到的结果与实际情况不同的原因分析.

二、问题情境和探究任务

问题情境

在不同地区，同一天的日出和日落时刻不尽相同；对一个地区而言，日出日落时刻又是随日期的变化而变化的. 北京天安门广场上的国旗每天伴着太阳升起、降落，下表给出了天安门广场 2003 年部分日期的升、降旗时刻：

日期	升/降时刻	日期	升/降时刻	日期	升/降时刻
1月1日	7:36/16:59	5月16日	4:59/19:23	9月20日	5:59/18:15
1月21日	7:31/17:20	6月3日	4:47/19:38	10月8日	6:17/17:46
2月10日	7:14/17:43	6月22日	4:46/19:46	10月26日	6:36/17:20
3月2日	6:47/18:06	7月9日	4:53/19:45	11月13日	6:56/17:00
3月22日	6:15/18:27	7月27日	5:07/19:33	12月1日	7:16/16:50
4月9日	5:46/18:46	8月14日	5:24/19:13	12月20日	7:31/16:51
4月28日	5:19/19:05	9月2日	5:42/18:45		

任务 1 试根据上表提供的数据，分析升、降旗时刻变化的大致

规律；建立坐标系，将以上数据描在坐标系中.

任务 2　分别建立日出时刻和日落时刻关于日期的近似函数模型；利用你建立的函数模型，计算“五一”国际劳动节、“十一”国庆节的升、降旗时刻.

***任务 3**　利用年鉴、互联网或其他资料，查阅北京天安门广场 2003 年升旗时刻表，检验模型的准确度，分析误差原因，考虑如何改进自己的模型.

***任务 4**　查阅、采集你所生活的地区（城市、省、乡村等）某年不同日期的“日出和日落”的时刻数据，建立一个函数关系.

三、实施建议

1. 组成学习探究小组，集体讨论，互相启发，形成可行的探究方案，独立思考，完成每个人的“成果报告”.

2. 任务 1 的建议.

为了便于在坐标系中观察表中数据，选择适当的计量单位，如升旗时刻以 10 min 为一个单位，日期可以天为单位，即 1 月 1 日为第 0 天，12 月 31 日为第 364 天. 可借助数学软件、图形计算器或其他工具绘制各点.

3. 任务 2 的建议.

利用自己的生活经验，或者访问家长、地理老师等，结合散点图，选择学过的适当函数，作为刻画该关系的模型. 应注意关键数据（如最早升（降）旗时刻和最迟升（降）旗时刻等）在确定拟合函数参数中的作用.

4. 任务 3 的建议.

根据观察坐标平面上所绘制点的走向趋势，可以考虑分段拟合函数.

5. “成果报告”的书写建议.

成果报告可以下表形式呈现：

探究学习成果报告表

年级______班____完成时间______

1. 课题组成员、分工、贡献	
成员姓名	分工与主要工作或贡献
2. 探究的过程和结果	
3. 参考文献	
4. 成果的自我评价(请说明方法或原理的合理性、特色或创新点、不足之处等)	
5. 拓展(选做)(在解决问题的过程中发现和提出的新问题,可以延伸或拓展的内容,得到的新结果或猜想等)	
6. 体会(描述在工作中的感受)	

6. 成果交流.

建议以小组为单位,选出代表,在班级中报告研究成果,交流研究体会.

7. 评价建议.

在评价中,采用自评、互评、教师评价相结合的形式,要善于发现别人工作中的特色.以下几个方面的内容可作为重点考虑:

(1) 求解过程和结果是否合理、清楚、简捷?

(2) 是否有独到的思考和发现?

(3) 是否提出有价值的求解设计和有见地的新问题?

(4) 是否发挥了组员的特长?合作学习的效果如何?

(5) 合理使用计算工具或计算技术的能力;

(6) 查阅文献、获取信息的能力.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
周期	period
弧度	radian
弧度制	radian system
正弦	sine
余弦	cosine
正切	tangent
正弦函数	sine function
余弦函数	cosine function
正切函数	tangent function
三角函数	trigonometric function
单位圆	unit circle
标量	scalar
向量	vector
平面向量	plane vector
有向线段	directed segment
向量共线	collinear of vectors
向量的夹角	included angle between two vectors
向量的垂直	perpendicular of vectors
正交分解	orthogonal decomposition
投影	projection
向量的坐标表示	coordinate represenntion of vector
三角恒等变形	trigonometric identity transformation

附录 2

信息检索网址导引

1. 中国基础教育网

http://www.cbe21.com/

简介：中国基础教育网是由教育部基础教育课程教材发展中心与北京师范大学共同创建的，面向全国基础教育工作者、学生、家长的专业服务平台，是中国基础教育领域的综合性网站.

2. 基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介：基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站，内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面. 网站在提供教学实例、教学课件的同时，也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　记

本套教材是按照国家教育部于 2003 年 4 月颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》编写的. 我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性，突出了数学的思想性和应用性，尊重学生的认知特点，创造多层次的学习活动，为不同的学生提供不同的发展平台，注意发挥数学的人文教育价值. 好学好用.

教材的建设是长期、艰苦的任务，每一位教师在教学实践中要自主地开发资源，创造性地使用教材. 我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作，对教材的逐步完善提供有力的支持，促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下（按姓氏笔画排序）：

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

参加本册教材编写的还有（按姓氏笔画排序）：

王尚志、李久权、李大永、吴会勇、邢自兴、张敏、张思明.

由于时间仓促，教材中的错误在所难免，恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社